Claude Bonnecaze (Voir page web)

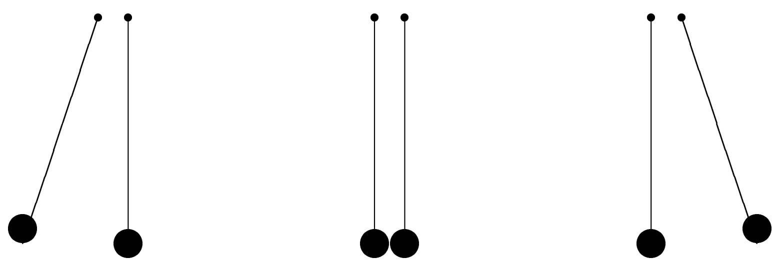
Distributions

Table des matières

1 Origine

Lors d'un changement brutal, quasi instantané, comme une percussion, on peut étudier le phénomène lui-même, considéré alors comme différentiable, avec des variations extrêmement grandes durant un temps très court, comme l'amorçage d'une bombe H que l'on cherche à bien comprendre afin de l'optimiser. On peut aussi le considérer comme un événement unique, instantané, et ne s'intéresser qu'à ses conséquences, ce qui est fréquent en Physique et en Chimie. C'est ce qui a amené Dirac à inventer sa *fonction généralisée* $\delta(t)$, nulle si $t \neq 0$ et dont l'intégrale vaut 1, or l'intégrale d'une fonction nulle **presque partout**, c'est-à-dire sauf sur un ensemble de mesure nulle, ce qui est le cas d'un point isolé, est nulle.

Choc de deux pendules identiques.



Lacher. Choc, énergie échangée. Remontée.

Si le choc des deux boules a lieu en $t = 0$, l'énergie de la boule de gauche passe instantanément de E_0 à 0, ce qui correspond à une variation de $-E_0\,\delta$. Celle de la boule de droite passe de 0 à E_0, d'où un gain $E_0\,\delta$. L'énergie de l'ensemble des deux boules serait conservée si le choc était parfaitement élastique.

Quant à faire l'étude du choc lui-même : déformation continue, propagation de l'onde de choc, déplacement des atomes, ce serait intéressant, mais c'est hors des possibilités de calcul actuelles.

Laurent Schwarz (1915-2002) a construit un objet mathématique, et la théorie associée, absolument rigoureuse, faisant disparaître cette contradiction, ce qui lui a valu la médaille Fields. Cette théorie a considérablement élargi certains domaines, comme la dérivation, l'analyse de Fourier, les équations aux dérivées partielles.

L'invention de Dirac revient à accepter une mesure μ telle que $\mu(\{0\}) = 1$ et $\mu(E) = 0$ pour toute partie E de $\mathbb{R}^*$. C'est une *mesure de Radon*[1].

1. Johann Radon (1887-1956), mathématicien autrichien.

2 Quelques rappels

Un compact de $\mathbb{R}^N$, N désignant toujours un entier supérieur ou égal à 1, est une partie non vide fermée et bornée. Un singleton est compact. Un compact K de $\mathbb{R}$ est inclu dans l'intervalle (compact) $[\inf K, \sup K]$.

Les projections étant continues et l'image continue d'un compact étant compacte, un compact K de $\mathbb{R}^N$ se projette sur les axes en $K_i \subset [a_i, b_i]$, et donc $K \subset \prod [a_i, b_i]$.

Rappelons un minimum d'intégration de Lebesgue [2].

Dans $\mathbb{R}$, la mesure d'un intervalle $]a, b[$, ou $[a, b]$, est égale à $b - a$.

La mesure d'un **pavé** $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_N, b_N]$ de $\mathbb{R}^N$ est égale au produit des $(b_i - a_i)$ (que les intervalles soient fermés ou non). La mesure d'un nombre fini ou dénombrable de points est nulle. Ainsi, la mesure de $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ est nulle.Mais il existe des ensembles non dénombrables de mesure nulle. Un sous-ensemble d'un ensemble de mesure nulle est de mesure nulle.

L'ensemble vide $\emptyset \in \mathbb{R}^N$ est de mesure nulle, celle d'une partie bornée est finie et celle de $\mathbb{R}^N$ est infinie.

La mesure d'une réunion finie ou dénombrable de parties mesurables de $\mathbb{R}^N$, deux à deux disjointes est la somme des mesures de ces parties. Elle est nulle si ces parties sont toutes de mesure nulle. Nous obtenons ainsi un ensemble $\mathcal{M}$ de parties mesurables.

Soit A une partie de $\mathbb{R}^N$ n'appartenant pas à $\mathcal{M}$. Sa *mesure intérieure*, $\mu_-(A)$, est la limite supérieure des mesures des éléments de $\mathcal{M}$ inclus dans A, et sa *mesure extérieure*, $\mu_+(A)$, est la limite inférieure des mesures des éléments de $\mathcal{M}$ contenant A. Si $\mu_-(A) = \mu_+(A)$, A est *mesurable*, et sa *mesure*, $\mu(A)$, est la valeur commune.

Soit $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ le plus petit ensemble de parties de $\mathbb{R}^N$ contenant les ouverts, stable par complémentation (il contient donc les fermés) et réunion finie ou dénombrable, ainsi que les ensembles de mesure nulle. Ainsi, Les éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ sont les *parties mesurables* de $\mathbb{R}^N$.

Une fonction $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $N \geq 1$, est **mesurable** si l'image réciproque de toute partie mesurable est mesurable (ou si elle est presque partout limite simple d'une suite de fonctions continues).

Une **fonction étagée** e est une fonction mesurable ne prenant qu'un nombre fini de valeurs $e_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n$. On pose $E_i = \{x \,|\, e(x) = e_i\}$; les E_i sont mesurables, de mesure m_i. L'intégrale de Lebesgue de e est par définition :

$$\int e(x)\, dx = \sum_{1 \leq i \leq n} m_i e_i.$$

Si l'un des deux, m_i ou e_i, est nul, $m_i e_i = 0$, même si l'autre est infini.

Une **fonction en escalier** e est une fonction étagée dont les E_i sont des produits d'intervalles $[a_i, b_i]$, de mesure μ_i. L'intégrale de Riemann [3] de e est

2. Henri Léon Lebesgue (1875-1941), mathématicien français.
3. Georg Frederic Bernhard Riemann (1826-1866), mathématicien allemand.

par définition :

$$\int e(x)\,dx = \sum_{1\le i\le n} e_i\mu_i.$$

Les ensembles des fonctions étagées et des fonctions en escalier sur $\mathbb{R}^n$ sont évidemment des espaces vectoriels (réels ou complexes).

L'intégrale de 0 à 1 de la fonction caractéristique des rationnels, $1_{\mathbb{Q}}$, est égale à 0 au sens de Lebesgue, et n'est pas définie au sens de Riemann. Elle est étagée mais pas en escalier. Les valeurs de la fonction sont 1 et 0, la mesure de $\{x \mid 1_{\mathbb{Q}}(x)=1\}$ est nulle et donc celle de $\{x \mid 1_{\mathbb{Q}}(x)=0\}$ est égale à 1.

Soit maintenant une fonction mesurable positive f, et e une fonction étagée quelconque. L'intégrale de f est par définition :

$$\int f(x)\,dx = \sup_{e\le f}\int e(x)\,dx,$$

quantité forcément non négative. Si elle est finie, f est **intégrable**.

Une fonction quelconque f est la différence de deux fonctions positives. Si ces fonctions sont mesurables, on a :

$$f = f_+ - f_-,\ f_+(x) = \sup(f(x),0),\ f_-(x) = \sup(-f(x),0),$$

et on définit :

$$\int f(x)\,dx = \int f_+(x)\,dx - \int f_-(x)\,dx.$$

Nous utiliserons les théorèmes d'intégration suivants, donnés sous la forme adaptée à nos besoins. Les fonctions sont supposées *mesurables*. Une fonction f est *intégrable* (ou *sommable*) si l'intégrale de $|f|$ est finie. N'oublions pas qu'une fonction mesurable est la différence de deux fonctions mesurables positives.

Théorème de convergence dominée. Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f et s'il existe une fonction intégrable g telle que :

$$\forall(n,x),\ |f_n(x)| \le g(x)\,pp$$

alors :

$$\lim_{n\to\infty}\int |f_n(x)-f(x)|\,dx = 0$$

f est intégrable et :

$$\int f = \int \lim f_n = \lim \int f_n.$$

Théorème de Fubini [4]**-Tonelli** [5]. Si $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+$ est mesurable :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy = \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\Big)\,dy = \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy\Big)\,dx.$$

4. Guido Fubini (1879-1943), mathématicien italien.
5. Leonida Tonelli (1885-1946), mathématicien italien.

Ces intégrales pouvant être infinies.

L'espace vectoriel des fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{R}^N$ de valeur absolue intégrable est noté $L^1(A)$. Cet espace est muni de la norme $|| \, ||_1$:

$$||f||_1 = \int_A |f(x)| \, dx.$$

L'espace vectoriel $L^2(A)$ des fonctions de carré sommable est muni de la norme $|| \, ||_2$:

$$||f||_2 = \Big(\int_A |f(x)|^2 \, dx \Big)^{1/2}.$$

L'espace vectoriel $L^\infty(A)$ des fonctions bornées est muni de la norme $|| \, ||_\infty$:

$$||f||_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|.$$

Une norme définit une convergence :

$$f_n \to f \iff ||f - f_n|| \to 0,$$

des boules ouvertes, donc une topologie.

3 Forme linéaire continue

Une *forme linéaire* sur un espace vectoriel E est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$. Elle est *continue* si, E étant muni d'une topologie, elle transforme une suite de E convergente pour sa topologie en une suite convergente dans $\mathbb{R}$. Ainsi la forme linéaire $f \mapsto f(0)$ sur l'espace vectoriel des fonctions définies en 0 est continue pour la norme ∞, mais pas pour les deux autres.

L'ensemble des formes linéaires sur un espace vectoriel de dimension finie E est son **dual (algébrique)** E^*, isomorphe à E. Si F est un sous-espace vectoriel de E, F^*, isomorphe à F, est un sous-espace vectoriel de E^*. Toutes les formes linéaires sont continues.

Si E est de dimension infinie, la situation est différente. D'une part, une forme linéaire n'est pas forcément continue ; ainsi la dérivation sur C^1 n'est pas continue :

$$f_n(x) = \sin^{n^2}(x/n) \to 0 \text{ et } f_n' \text{ n'a pas de limite}$$

D'autre part, si F est un sous-espace vectoriel de E, c'est le dual de E qui est un sous-espace vectoriel de du dual de F ; une forme linéaire sur E est une forme linéaire sur F, mais il existe des formes linéaires continues sur F qui ne sont pas définies sur E.

L'intégration est une forme linéaire continue sur $F = C^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $|| \, ||_\infty$, mais pas sur $E = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\}$ muni de la même norme.

L'espace vectoriel des formes linéaires sur E, de dimension infinie, est le **dual** de E, noté E^*, qui n'est pas isomorphe à E, et l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E est le **dual topologique** de E, noté E', sous-espace de E^*. En dimension finie, $E^* = E'$.

3.1 Fonctions localement intégrables

Une fonction définie sur $\mathbb{R}^N$ est **localement intégrable** si elle est intégrable sur tout compact.

Un ensemble de mesure nulle dans $\mathbb{R}$ est une partie ne contenant aucun intervalle, mais une partie de $\mathbb{R}$ ne contenant aucun intervalle peut ne pas être de mesure nulle, comme l'ensemble des irrationnels : c'est son complémentaire $\mathbb{Q}$ qui est de mesure nulle. Par exemple un ensemble fini ou infini dénombrable de points isolés, l'ensemble $\{1/n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ (dans lequel 0 n'est pas isolé), l'ensemble de Cantor (non dénombrable), toute réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle... sont de mesure nulle. Dans $\mathbb{R}^N$, un ensemble de mesure nulle ne contient aucun pavé, mais cette condition n'est pas suffisante : $[0,1] \times ([0,1] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, de mesure 1, ne contient aucun pavé. Il suffit, pour qu'un ensemble soit de mesure nulle, que sa projection sur une droite soit de mesure nulle.

Deux fonctions localement intégrables qui ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle seront dites *équivalentes*, la relation étant réflexive, symétrique et transitive. L'ensemble des classes d'équivalence définit l'espace vectoriel $\mathcal{L}^1_{loc}$. Ses éléments seront appelés, par abus de langage, des *fonctions localement intégrables*. Ceci est justifié par le fait que des fonctions équivalentes ont la même intégrale.

3.2 Fonctions-test

L'ensemble des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ à support compact, dites **fonctions-test**, est noté $\mathcal{D}_N$. Nous verrons plus loin la nécessité de ces conditions. Notons $\mathrm{Supp}(\phi)$ le support de $\phi \in \mathcal{D}$, le plus petit fermé de $\mathbb{R}^N$ contenant les x tels que $\phi(x) \neq 0$. Lorsque $N = 1$, on ne mettra ni indice ni exposant : $\mathcal{D}$ désignera $\mathcal{D}_1$...

Montrons l'existence des fonctions-test. La fonction :

$$\phi \,:\, x \mapsto \begin{cases} \exp\left(\dfrac{-1}{1 - ||x||^2}\right) & \text{si} \quad ||x|| \leq 1, \\ 0 \quad \text{sinon} & \end{cases}$$

est à support, la boule unité B_N, compact. Ses dérivées successives sont le produit d'une fraction rationnelle et de ϕ, et ϕ, qui tend vers 0 quand $||x|| \to 1$ dans B_N l'emporte sur les fractions rationnelles. Elles s'annulent donc lorsque $||x|| = 1$; ϕ est donc une fonction-test, à partir de laquelle on peut en construire une infinité d'autres (par translation, homothétie, composition, déformation C^∞, convolution).

L'ensemble $\mathcal{D}_N$ est un espace vectoriel, car si ϕ_1 et ϕ_2 appartiennent à $\mathcal{D}_N$, si a et b sont des scalaires et si $\phi = a\phi_1 + b\phi_2$, alors $\mathrm{Supp}(\phi) \subset \mathrm{Supp}(\phi_1) \cup \mathrm{Supp}(\phi_2)$ est compact, et pour tout opérateur différentiel $\Delta = D_1^{\alpha_1} \ldots D_N^{\alpha_N}$, D_i désignant la dérivée partielle en x_i, ou $\Delta = D^{(k)}$ si $N = 1$, on a $\Delta\phi = a\Delta\phi_1 + b\Delta\phi_2$, par linéarité de la dérivation partielle dans le cas $\mathbb{R}^N$ ou de la dérivation si $N = 1$.

Une **semi-norme** sur un espace vectoriel E est une application $N : E \mapsto \mathbb{R}_+$ telle que, pour tous éléments x, y :

$$N(x+y) \leq N(x) + N(y), \quad N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x).$$

Ce n'est pas une norme car on peut avoir $x \neq 0$ et $N(x) = 0$. Une famille de semi-normes est *séparante* si, $\forall x \neq 0$, il existe une semi-norme N de la famille telle que $N(x) \neq 0$.

Un **espace de Fréchet** est un espace vectoriel topologique réel, complet, dont la topologie est définie par une famille (séparante) dénombrable de semi-normes (N_k). Il est *métrisable* :

$$d = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k} \frac{N_k}{1 + N_k}.$$

Muni des semi-normes :

$$N_k(\phi) = ||\phi^{(k)}||_\infty$$

avec, si $N > 1$:

$$\phi^{(k)} = \mathrm{D}_1^{\alpha_1} \ldots \mathrm{D}_N^{\alpha_N} \phi, \quad \sum \alpha_i = k,$$

l'espace $\mathcal{D}_N$ est de Fréchet.

Ceci mène à la définition de la convergence dans $\mathcal{D}$:

$$\boxed{\phi_n, \phi \in \mathcal{D}_N,\ \phi_n \to \phi \iff \begin{cases} \exists K \subset \mathbb{R}^N, \text{ compact, tel que :} \\ \forall n \ \mathrm{Supp}(\phi_n) \subset K, \text{ les dérivées de} \\ \text{tous ordres de } \phi_n - \phi \text{ convergent} \\ \text{uniformément vers 0 quand } n \to \infty. \end{cases}}$$

3.3 Exemples

La fonction $(a < b)$:

$$\phi_{[a,b]} = \begin{cases} \exp(\dfrac{-1}{(x-a)(b-x)} & \text{si} \quad a < x < b, \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

est C^∞ à support $[a, b]$.

Quitte à diviser $\phi_{[a,b]}$ par sa norme $||\phi_{[a,b]}||_1$, on peut la supposer normée. La fonction C^∞ :

$$\Phi_{[a,b]}(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi_{[a,b]}(t)\, dt$$

est nulle pour $x \leq a$, égale à 1 pour $x \geq b$.

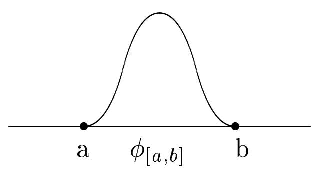
Si $N > 1$, on fera le produit des $\Phi_{[a_i,b_i]}$, $1 \leq i \leq N$.

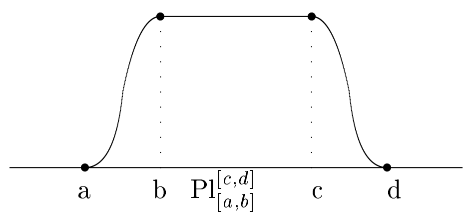
Soient c et d tels que $b < c < d$. La fonction C^∞ $1 - \Phi_{[c,d]}(x)$ vaut 1 si $x \leq c$ et 0 si $x \geq d$. On a alors la **fonction-plateau** :

$$\mathrm{Pl}_{(a,b)}^{(c,d)}(x) = \begin{cases} \Phi_{[a,b]}(x) \ \text{ si } x \leq b, \\ 1 \ \text{ si } a \leq x \leq b, \\ 1 - \Phi_{[c,d]}(x) \ \text{ si } x \geq d. \end{cases}$$

est C^∞ à support $[a, d]$.

Si $N > 1$, on fera le produit de N fonctions-plateau, une par dimension.





3.4 L'espace $\mathcal{D}'_N$ des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}_N$

Une forme linéaire u sur $\mathcal{D}_N$ est **continue** si, lorsque la suite (ϕ_n) tend vers ϕ (dans $\mathcal{D}_N$), alors $(u(\phi_n))$ tend vers $u(\phi)$ (dans $\mathbb{R}$). On notera $< u, \phi >$ pour $u(\phi)$. La définition suivante, qui découle de la topologie de $\mathcal{D}$, sera rendue claire par les deux exemples.

> La forme linéaire u sur $\mathcal{D}_N$ est continue si pour tout compact K de $\mathbb{R}^N$ et toute $\phi \in \mathcal{D}_N$ de support inclus dans K :
>
> $$\exists\, (c_K, p_K) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N} : |< u, \phi >| \leq c_K \sup_{x \in K,\, p \leq p_K} |\phi^{(p)}(x)|$$

La condition implique évidemment la continuité, car si $\phi_n \to 0$, toutes ses dérivées tendent vers 0, donc aussi $< u, \phi >$.

Montrons la réciproque. Si u est continue, sa restriction aux fonctions ϕ de $\mathcal{D}$ de support inclus dans un compact K est continue, et, $\forall \epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $d(\phi, 0) \leq \eta$ implique $< u, \phi > \leq \epsilon$. Choisissons p tel que $2^{-p} \leq \eta/2$. Si, pour tout $i \leq p$, $||\phi^{(i)}||_\infty \leq \eta/2$, on a bien :

$$\begin{aligned} d(\phi, 0) &= \sum_{0 \leq i \leq p} \frac{1}{2^i} \frac{||\phi^{(i)}||_\infty}{1 + ||\phi^{(i)}||_\infty} + \sum_{p+1 \leq i < \infty} \frac{1}{2^i} \frac{||\phi^{(i)}||_\infty}{1 + ||\phi^{(i)}||_\infty} \\ &= \sum_{0 \leq i \leq p} \frac{\eta}{2^{i+1}} + \sum_{p+1 \leq i \infty} \frac{1}{2^i} \\ &\leq \eta. \end{aligned}$$

Le *dual topologique* de $\mathcal{D}_N$, c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}_N$, est noté $\mathcal{D}'_N$. Remarquons que δ appartient à $\mathcal{D}'$; on a en effet, pour tout compact K, $c_K = 1$ et $p_K = 0$.

Premier exemple : à une fonction localement intégrable f on peut associer la forme linéaire :

$$\begin{array}{cccc} \widetilde{f} : & \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ & \phi & \mapsto & \displaystyle\int f(x)\,\phi(x)\,dx. \end{array}$$

Elle est continue. En effet, si K est un compact, si $\phi \in \mathcal{D}$ a son support inclus dans K, et si :

$$\int_K |f(x)|\,dx = c_K,$$

on a :

$$|\int f(x)\,\phi(x)\,dx| \leq c_K\,||\phi||_\infty$$

d'où la continuité de $\widetilde{f}$ ($p_K = 0$).

Nous avons ainsi défini une application linéaire de l'espace vectoriel des fonctions localement intégrable dans celui des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}$:

$$\begin{array}{cccc} u : & \mathcal{L}^1_{loc} & \to & \mathcal{D}' \\ & f & \mapsto & \widetilde{f}. \end{array}$$

Cette application n'est pas surjective puisque δ n'a pas d'antécédent. En effet, une fonction $f \in \mathcal{L}^1_{loc}$ telle que $\widetilde{f} = \delta$ devrait être nulle sur $\mathbb{R}^*$, donc équivalente à la fonction nulle, d'où $\widetilde{f} = 0$, ce qui est absurde.

Est-elle injective ? Si $\widetilde{f} = \widetilde{g}$, on a quelle que soit $\phi \in \mathcal{D}$:

$$\int (f(x) - g(x))\,\phi(x)\,dx = 0.$$

Si f était différent de g au sens de $\mathcal{L}^1_{loc}$, le support de $f - g$ ne serait pas de mesure nulle et contiendrait un ensemble de mesure non nulle P dans lequel $f - g$ garderait un signe constant, et on aurait, ϕ étant une fonction-test de même signe à support dans P :

$$\int (f(x) - g(x))\,\phi(x)\,dx > 0.$$

Le support de $f - g$ est donc de mesure nulle, et $f = g$ (d'après la définition de $\mathcal{L}^1_{loc}$). Elle est donc injective, et on peut, en identifiant f à $\widetilde{f}$, considérer que toute fonction de $\mathcal{L}^1_{loc}$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}$.

Deuxième exemple : la forme linéaire $\phi \mapsto \phi''(0)$ est continue car, pour tout compact K, on a $c_K = 1$ et $p_K = 2$.

4 Distributions

4.1 Définitions

Les éléments de l'espace vectoriel $\mathcal{D}'_N$ sont, par définition, les **distributions**. Le sous-espace vectoriel $u(\mathcal{L}^1_{loc})$ est formé des distributions **régulières** ; les autres, comme δ, sont dites **singulières**.

La notion de *distribution* généralise donc celle de *fonction*.

L'ensemble $\mathcal{D}'_N$ n'est pas muni d'une multiplication ; mais, si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, on a, pour toute distribution T :

$$< f\,T, \phi > = < T, f\phi >$$

puisque $f\phi$ est C^∞ à support compact (Supp($f\phi$) $\subset$Supp(ϕ)).

Deux distributions sont *égales* si elles coïncident sur toute $\phi \in \mathcal{D}$.

On dit qu'une distribution T est nulle sur un ouvert U de $\mathbb{R}^N$ si $< T, \phi > = 0$ si Supp(ϕ) $\subset U$. Le **support** d'une distribution T, Supp(T), est le complémentaire du plus grand ouvert de $\mathbb{R}^N$ sur lequel T s'annule.

$\mathcal{D}'_+$ est l'ensemble des distributions de support minoré, $\mathcal{D}'_-$ est l'ensemble des distributions de support majoré, $\mathcal{D}'_0$ est l'ensemble des distributions de support compact($\mathcal{D}'_+ \cap \mathcal{D}'_-$).

Si $N > 1$, on applique ces définitions à chaque dimension ; ainsi $\mathcal{D}'_{N+}$ est formé des distributions dont le support est l'ensemble des (x_i) vérifiant la condition $x_i \geq a_i$ pour $1 \leq i \leq N$, et un certain (a_i).

Dans la suite, ϕ désignera génériquement une fonction de $\mathcal{D}_N$, et T une distribution.

4.2 Exemples

4.2.1 Distributions de Heaviside $\widetilde{\mathrm{H}}$, signe $\widetilde{\mathrm{S}}$ et $\widetilde{1}$

A partir de la **fonction de Heaviside** H$\in \mathcal{L}^1_{loc}$:

$$\mathrm{H} : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

on définit la distribution de Heaviside, régulière :

$$< \widetilde{\mathrm{H}}, \phi > = \int_{\mathbb{R}_+} \phi(t)\,dt$$

de support $\mathbb{R}_+$.

On définit la fonction **signe** : $\mathrm{S}(x) = \mathrm{H}(x) - \mathrm{H}(-x)$, valant 1 si $x > 0$, -1 si $x < 0$, 0 si $x = 0$, et la distribution associée :

$$< \widetilde{\mathrm{S}}, \phi > = -\int_{\mathbb{R}_-} \phi(x)\, dx + \int_{\mathbb{R}_+} \phi(x)\, dx.$$

A la fonction $1 : x \mapsto 1$, localement intégrable, on associe la distribution :

$$< \widetilde{1}, \phi > = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, dx.$$

Pour chacune de ces trois distributions on a, $\forall K$, $c_K = 1$ et $p_K = 0$

4.2.2 Distribution de Dirac

Elle est à l'origine de la théorie :

$$< \delta, \phi > = \phi(0).$$

On utilise aussi ses translatées :

$$< \delta_a, \phi > = \phi(a)$$

que l'on note parfois abusivement (car δ n'est pas une fonction) $\delta(x-a)$ lorsque cela est pratique, par exemple s'il y a plusieurs variables.

Elle est singulière car, en tant que fonction, elle devrait être nulle sauf en 0, donc presque partout, et ce serait la fonction nulle de $\mathcal{L}^1_{loc}$, alors que son intégrale serait égale à 1. Elle vérifie, $\forall K$, $(c_K, p_K) = (1, 0)$.

Notons que, si $X : x \mapsto x$, $X\delta = 0$:

$$< X\delta, \phi > = < \delta, x\phi(x) > = x\phi(x)_{|x=0} = 0,$$

et que $f\delta = f(0)\delta$ si $f \in C^\infty$.

Le **peigne de Dirac** de période θ :

$$< \mathrm{P}_\theta, \phi > = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi(n\theta)$$

est utilisé dans les transmissions pour échantillonner. La somme est finie, étant restreinte aux n tels que $n\theta$ appartienne au support de ϕ.

4.3 Limite d'une suite de distributions

Une suite $(T_n)_n$ de distributions a pour **limite** T si :

$$< \lim T_n, \phi > = \lim < T_n, \phi > = < T, \phi > .$$

Quelle est la limite de la distribution $\widetilde{\sin(nX)}$, si $\sin(nX) : x \mapsto \sin nx$?

$$\begin{aligned}
< \widetilde{\sin(nX)}, \phi > &= \int_{\mathbb{R}} \sin nx \phi(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sin y \phi(y/n)\, dy/n \\
&= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} \sin y \phi(y/n)\, dy.
\end{aligned}$$

La limite est la distribution nulle, alors que la suite de fonctions $\sin(nX)$ n'a pas de limite.

Même question avec $\displaystyle\frac{\widetilde{\sin(nX)}}{X}$:

$$\begin{aligned}
< \frac{\widetilde{\sin(nX)}}{X}, \phi > &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(nx)}{x} \phi(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(y)}{y} \phi(y/n)\, dy \\
&\sim \phi(0)\frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

et la limite est $\displaystyle\frac{\pi}{2}\delta$.

Une suite $(T_n)_n$ est une **suite de Dirac** si sa limite est δ.

Si par exemple l'intégrale sur $\mathbb{R}$ d'une fonction positive est égale à 1 et si $f_n(x) = nf(nx)$, alors $\widetilde{f_n}$ est une suite de Dirac. En effet l'intégrale de f_n est égale à 1 pour tout $n \in \mathbb{N}$, et, en posant $y = nx$, on a :

$$< \widetilde{f}_n, \phi > = \int_{\mathbb{R}} nf(nx)\, \phi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, \phi(y/n)\, dy.$$

Comme :

$$|\int_{\mathbb{R}} f(y)\, \phi(y/n)\, dy| \leq ||\phi||_\infty \int_{\mathbb{R}} f(y) = ||\phi||_\infty$$

on peut, par *convergence dominée*, passer à la limite sous le signe somme :

$$< \widetilde{f}_n, \phi > = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, \phi(y/n)\, dy \to \phi(0) = < \delta, \phi > .$$

Plus généralement, on peut remplacer n par un réel positif a que l'on fait tendre vers l'infini ou vers 0. Si les fonctions $(f_a) \in L^1(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$, sont telles que :

$$\begin{cases}
\exists A \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall a \in \mathbb{R} \ :\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_a(x)\, dx \leq A, \\
\forall x \neq 0 \ :\ \displaystyle\lim_{a \to 0} f_a(x) = 0, \\
\displaystyle\lim_{a \to 0} \int_{\mathbb{R}} f_a(x)\, dx = 1,
\end{cases}$$

la limite quand $a \to 0$ de f_a n'est pas une fonction car si c'était le cas son intégrale serait nulle. L'intégrale :

$$\lim_{a\to 0}\int_{\mathbb{R}} f_a(x)\,\big(\phi(x)-\phi(0)\big)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{a\to 0} f_a(x)\,(\phi(x)-\phi(0))\,dx$$

est nulle car l'expression sous le signe somme est identiquement nulle, et donc :

$$< \lim_{a\to 0} \widetilde{f}_a, \phi > = \phi(0) = < \delta, \phi > .$$

Nous construirons plus loin des suites de Dirac à partir des fonctions **gaussiennes** $\xi_a(x) = \exp(-a^2x^2)$.

Remarquons que la suite (f_n), $f_n(x) = n$ si $x \in [0, 1/n]$, $f_n(x) = 0$ sinon, est une suite de Dirac.

Construisons une distribution quelque peu *exotique*. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons :

$$\sigma_m = \sum_r \frac{\delta_r}{m^3}$$

r désignant les rationnels de $]0, 1[$ de dénominateur m ; il y en a au plus $m-1$. On a :

$$0 \leq \ | < \sigma_m, \phi > | \ \leq \frac{m-1}{m^3}\,||\phi||_\infty < \frac{1}{m^2}\,||\phi||_\infty.$$

Puis :

$$\Sigma_n = \sum_{1\leq m\leq n} \sigma_m,$$

d'où, la série $\sum 1/m^2$ ayant pour somme $\pi^2/6$:

$$0 \leq \ | < \Sigma_n, \phi > | \ < \frac{\pi^2}{6}\,||\phi||_\infty.$$

La suite $| < \Sigma_n, \phi > |$, croissante et majorée par $\pi^2/6\,||\phi||_\infty$, tend vers une limite, et nous posons :

$$< \Sigma, \phi > = \lim_{n\to\infty} < \Sigma_n, \phi > .$$

La linéarité et la continuité sont évidentes.

4.3.1 Valeur principale de $1/X$

On définit la distribution $\mathrm{vp}(\dfrac{1}{X})$, **valeur principale** de $\dfrac{1}{X}$ par :

$$< \mathrm{vp}(\frac{1}{X}), \phi > = \lim_{\epsilon\to 0_+} \Big(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\phi(x)}{x}\,dx + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x}\,dx \Big).$$

L'intégrale existe car $x \mapsto \dfrac{\phi(x)}{x}$, $|x| \geq \epsilon$, est C^∞ à support compact. On peut écrire :

$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{\phi(x)}{x}\, dx = -\int_{\epsilon}^{R} \frac{\phi(-x)}{x}\, dx$$

de sorte que :

$$\int_{\epsilon \leq |x| \leq R} \frac{\phi(x)}{x}\, dx = \int_{\epsilon}^{R} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x}\, dx,$$

or, pour $0 \leq x \leq \epsilon$, $\dfrac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} \sim 2\phi'(0)$, et l'intégrale de 0 à ϵ tend vers 0, ce qui assure l'existence de la limite :

$$\boxed{< \mathrm{vp}(\frac{1}{X}), \phi >= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x}\, dx.}$$

L'intégrale est calculée sur un compact, le support de $\phi - \phi_-$, si $\phi_-(x) = \phi(-x)$.

Comme $\phi(x) = \phi(0) + x\phi'(h)$, $\dfrac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} = 2\phi'(k)$, on a, en restriction à un compact K de mesure m :

$$| < \mathrm{vp}(\frac{1}{X}), \phi_{|K} > | \leq m||\phi'||_\infty$$

d'où la continuité : $(c_K, p_K) = (m, 1)$.

On peut de la même façon définir les distributions $\mathrm{vp}(\dfrac{1}{\sin})$, $\mathrm{vp}(\dfrac{1}{\tan})$...

Notons que $X\mathrm{vp}(\dfrac{1}{X}) = 1$ car $<\mathrm{vp}(\dfrac{1}{X}), X\phi >= \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, dx = < 1, \phi >$, et que $(\mathrm{vp}(\dfrac{1}{X})X)\delta = \delta$, alors que $\mathrm{vp}(\dfrac{1}{X})\,(X\delta) = 0$ car $X\delta = 0$; le produit de distributions n'a pas de sens en général.

4.3.2 Partie finie de $1/X^2$ et de $1/X^3$

Peut-on définir une distribution à partir de la fonction $x \mapsto f_\epsilon(x) = 1/x^2$ si $|x| > \epsilon$ $(\epsilon > 0)$, $f_\epsilon(x) = 0$ si $x \in [-\epsilon, \epsilon]$?

Comme $\phi(x) = \phi(0) + x\phi'(0) + \cdots$, on a pour tout $\epsilon > 0$:

$$\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{\phi(0)}{x^2}\, dx + \int_{\epsilon}^{1} \frac{\phi(0)}{x^2}\, dx = -2 + 2\frac{\phi(0)}{\epsilon}$$

et :

$$\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{x\phi'(0)}{x^2}\, dx + \int_{\epsilon}^{1} \frac{x\phi'(0)}{x^2}\, dx = 0.$$

La partie divergente de $< \widetilde{f}_\epsilon, \phi >$ est égale à $2\dfrac{\phi'(0)}{\epsilon}$, et on peut donc définir la distribution **partie finie** de $1/X^2$ comme limite quand ϵ tend vers 0_+ de $\widetilde{f}_\epsilon$ moins sa partie divergente :

$$\boxed{< \mathrm{pf}(\frac{1}{X^2}), \phi > = \lim_{\epsilon \to 0_+} \Big(\int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\phi(x)}{x^2}\, dx - 2\frac{\phi(0)}{\epsilon} \Big)}$$

On définit de la même façon la distribution **partie finie** de $1/X^3$. La divergence vient du terme $\dfrac{\phi'(0)}{x^2}$; elle est égale à $2\dfrac{\phi'(0)}{\epsilon}$; on pose alors :

$$\boxed{< \mathrm{pf}(\frac{1}{X^3}), \phi > = \lim_{\epsilon \to 0_+} \Big(\int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\phi(x)}{x^3}\, dx - 2\frac{\phi'(0)}{\epsilon} \Big)}$$

En raisonant comme pour $\mathrm{vp}(1/X)$, on montre que :

$$\begin{cases} |< \mathrm{pf}(\dfrac{1}{X^2}), \phi >| \ \leq 2m\, ||\phi''||_\infty, \\ |< \mathrm{pf}(\dfrac{1}{X^3}), \phi >| \ \leq 2m\, ||\phi'''||_\infty, \end{cases}$$

d'où la continuité de ces deux formes linéaires.

4.4 Translation et dilatation

Si $\tau_a(x) = x + a$, $a \in \mathbb{R}$, et $\mu_a(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} < T \circ \tau_a, \phi > & = & < T, \phi \circ \tau_{-a} > \\ < T \circ \mu_a, \phi > & = & \dfrac{1}{|a|} < T, \phi \circ \mu_{1/a} > \end{array}}$$

Montrons la première relation :

$$\begin{array}{rcl} < T \circ \tau_a, \phi > & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} T(x+a)\, \phi(x)\, dx \\ & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} T(y)\, \phi(y-a)\, dy \\ & = & < T, \phi \circ \tau_{-a} > \end{array}$$

et la seconde :

$$\begin{aligned}
< T \circ \mu_a, \phi > &= \int_{\mathbb{R}} T(ax)\, \phi(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} T(y)\, \phi(\frac{y}{a})\, \frac{dy}{a} \\
&= \frac{1}{a} < T, \phi \circ \mu_{1/a} > \quad \text{si } a > 0, \\
&= \frac{-1}{a} < T, \phi \circ \mu_{1/a} > \quad \text{si } a < 0.
\end{aligned}$$

4.5 Dérivée d'une distribution

La dérivée au sens classique d'une fonction f se calcule en un point. Au sens des distributions, ce sera la dérivée de l'action de f sur $\mathcal{D}$. Lorsque f est dérivable, les deux définitions coïncident, mais la seconde a un domaine d'application beaucoup plus vaste.

Si f est dérivable, on a en notant selon la commodité $\mathrm{D}f$ ou f' :

$$< \widetilde{f'}, \phi > = \int_{\mathbb{R}} f'(t)\, \phi(t)\, dt$$

d'où, en intégrant par parties :

$$< \widetilde{f'}, \phi > = \left[f(t)\, \phi(t) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(t)\, \phi'(t)\, dt$$

et donc, le crochet étant nul car ϕ est à support compact :

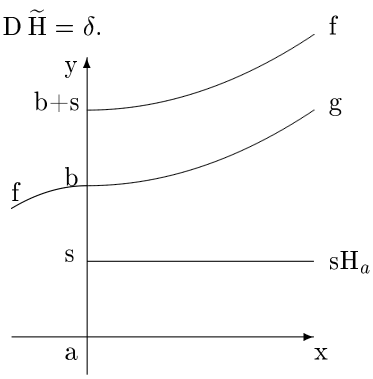
$$< \widetilde{f'}, \phi > = - \int_{\mathbb{R}} f(t)\, \phi'(t)\, dt = - < \widetilde{f}, \phi' > .$$

Si f est dérivable, on peut donc poser $\mathrm{D}\widetilde{f} = \widetilde{f'}$, mais $\mathrm{D}\widetilde{f}$ est ainsi définie pour toute $f \in \mathcal{L}^1_{loc}$, dérivable ou non.

Par exemple :

$$< \mathrm{D}\,\widetilde{\mathrm{H}}, \phi > = - < \widetilde{\mathrm{H}}, \phi' > = - \int_0^{+\infty} \phi'(t)\, dt = \phi(0) = < \delta, \phi >$$

et $\mathrm{D}\,\widetilde{\mathrm{H}} = \delta$.



Si f présente en a une discontinuité de première espèce, un saut d'amplitude s, et si $\mathrm{H}_a(x) = \mathrm{H}(x-a)$, la fonction :

$$g = f - s\mathrm{H}_a$$

est continue, et :

$$\widetilde{f} = \widetilde{g} + s\widetilde{\mathrm{H}}_a$$

d'où :

$$\mathrm{D}\,\widetilde{f} = \mathrm{D}\,\widetilde{g} + s\delta_a.$$

Au sens des distributions, $\widetilde{f'} = \widetilde{g}' + s\delta_a$. Si f a n discontinuités de première espèce, de sauts s_i en $x = a_i$, on a, si $g = f - \sum s_i H_{a_i}$:

$$\mathrm{D}\,\widetilde{f} = \mathrm{D}\,\widetilde{g} + \sum s_i \delta_{a_i}.$$

Ainsi, la dérivée du **signal porte** Π des transmissions, égal à 1 sur $[-1, 1]$ et nul en dehors, est égale à $\delta_{-1} - \delta_1$, et celle du *signe* S, à 2δ. Leur dérivée, au sens des fonctions, est la fonction nulle (dans $\mathcal{L}^1_{loc}$).

La fonction logarithme népérien étendu à $\mathbb{R}$, $\ln^* : x \mapsto \ln|x|$, dont une primitive est $X\ln^*$, est localement intégrable et définit la distribution $\widetilde{\ln^*}$. Calculons la dérivée de cette distribution :

$$\begin{aligned} < \mathrm{D}\,\widetilde{\ln^*}, \phi > &= - < \widetilde{\ln^*}, \phi' > \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \ln^* x\, \phi'(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(x)}{x}\, dx \\ &= < \mathrm{vp}(\frac{1}{X}, \phi > . \end{aligned}$$

On a donc $\mathrm{D}\,\widetilde{\ln^*} = \mathrm{vp}(\frac{1}{X})$, en passant par une intégration par parties et une intégrale impropre.

Si une distribution singulière Δ est la limite d'une suite de distributions régulières $\widetilde{f}_n$ (voir 9.1), et si nous posons par définition $\mathrm{D}\,T = \lim \mathrm{D}\,\widetilde{f}_n$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} < \mathrm{D}\,T, \phi > &= < \lim \mathrm{D}\,\widetilde{f}_n, \phi > \\ &= \lim\ < \mathrm{D}\,\widetilde{f}_n, \phi > \\ &= -\lim\ < \widetilde{f}_n, \phi' > \\ &= - < \lim \widetilde{f}_n, \phi' > \\ &= - < T, \phi' > \end{aligned}$$

ce qui nous amène à poser, par définition :

$$\boxed{\forall T \in \mathcal{D}' : < \mathrm{D}\,T, \phi > = - < T, \phi' >}$$

Calculons la dérivée de $\mathrm{vp}(\frac{1}{X})$:

$$\begin{aligned}
< \mathrm{D}\,\mathrm{vp}(\frac{1}{X}), \phi > &= - < \mathrm{vp}(\frac{1}{X}), \phi' > \\
&= - \lim_{\epsilon \to 0_+} \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\phi'(x)}{x}\, dx \\
&= - \lim_{\epsilon \to 0_+} \Big(\Big[\frac{\phi(x)}{x}\Big]_{\epsilon}^{+\infty} + \Big[\frac{\phi(x)}{x}\Big]_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\phi(x)}{x^2}\, dx \Big) \\
&= - \lim_{\epsilon \to 0_+} \Big(\int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\phi(x)}{x^2}\, dx - 2\frac{\phi(0)}{\epsilon} \Big) \\
&= - < \mathrm{pf}(\frac{1}{X^2}), \phi > .
\end{aligned}$$

Calculons enfin la dérivée de $\mathrm{pf}(\frac{1}{X^2})$:

$$\begin{aligned}
< \mathrm{D}\,\mathrm{pf}(\frac{1}{X^2}), \phi(x) > &= - < \mathrm{pf}(\frac{1}{X^2}), \phi'(x) > \\
&= - \lim_{\epsilon \to 0_+} \Big(\int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\phi'(x)}{x^2}\, dx - 2\frac{\phi'(0)}{\epsilon} \Big),
\end{aligned}$$

d'où en intégrant par partiese $\mathrm{D}\,\mathrm{pf}(\frac{1}{X^2}) = -2\,\mathrm{pf}(\frac{1}{X^3})$.

Tableau récapitulatif :

$$\boxed{\begin{aligned}
< \mathrm{D}\,T, \phi > &= < T, \phi' > \\
\mathrm{D}\,\widetilde{\mathrm{H}} &= \delta \\
\mathrm{D}\,\widetilde{\mathrm{S}} &= 2\delta \\
< \mathrm{D}\,\delta, \phi > &= -\phi'(0) \\
< \mathrm{D}^n\delta, \phi > &= (-1)^n\,\phi^{(n)}(0) \\
< \mathrm{D}\,\mathrm{P}_\theta, \phi > &= - \sum_{k \in \mathrm{Supp}(\phi)} \phi'(k\theta) \\
\mathrm{D}\,\widetilde{\ln^*} &= \mathrm{vp}(\frac{1}{X}) \\
\mathrm{D}\,\mathrm{vp}(\frac{1}{X}) &= -\mathrm{pf}(\frac{1}{X^2}) \\
\mathrm{D}\,\mathrm{pf}(\frac{1}{X^2}) &= -2\,\mathrm{pf}(\frac{1}{X^3})
\end{aligned}}$$

Si $T_n \to T$ dans $\mathcal{D}$, alors $T'_n \to T'$. En effet :

$$< T'_n, \phi > = - < T_n, \phi' > \to - < T, \phi' > = < T', \phi > .$$

Notons que toute distribution est C^∞.

Une distribution T est **homogène** de degré a si $\sum x_i \dfrac{\partial T}{\partial x_i} = aT$.

4.6 Produit tensoriel

Définissons d'abord le **produit tensoriel** de deux fonctions :

$$f \otimes g \,:\, (x,y) \mapsto f(x)g(y)$$

qui est évidemment commutatif, associatif, distributif par rapport à l'addition et de neutre 1.

Si $f(x)$ et $g(y)$ sont localement intégrables, elles définissent des distributions régulières $\widetilde{f}$, $\widetilde{g}$ et $\widetilde{f \otimes g}$. Si $\phi \in \mathcal{D}_2$, son support, compact, est inclus, dans une boule $B(0,r)$ de $\mathbb{R}^2$. On peut écrire :

$$\begin{aligned}
< \widetilde{f \otimes g}, \phi > &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y)\phi(x,y)\,dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x)\Big(\int_{\mathbb{R}} g(y)\phi(x,y)\,dy\Big)\,dx \\
&= < \widetilde{f}(x), < \widetilde{g}(y), \phi(x,y) > >
\end{aligned}$$

à condition que $\psi(x) = < \widetilde{g}(y), \phi(x,y) >$ soit C^∞ à support compact. Comme ϕ est C^∞ en x, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N} \,:\, D_x^k(\psi)(x) = < \widetilde{g}(y), D_x^k\phi(x,y) >$$

et ψ est également C^∞. Le support de ψ est inclus dans $\{x \,|\, (x,y) \subset B\}$, *a fortiori* dans $[-r,r]$, et donc compact.

La linéarité et la continuité sont héritées des propriétés de $\widetilde{f}$ et de $\widetilde{g}$, et $\widetilde{f \otimes g}$ est une distribution sur $\mathbb{R}^2$.

On pose par définition $\widetilde{f} \otimes \widetilde{g} = \widetilde{f \otimes g}$.

Les applications $\widetilde{f} \mapsto \widetilde{f \otimes g}$ et $\widetilde{g} \mapsto \widetilde{f \otimes g}$ sont continues. En effet, si $\widetilde{f_n} \to \widetilde{f}$, $< \widetilde{f_n}, \psi > \to < \widetilde{f}, \psi >$, et la continuité de $\widetilde{g}$ permet de conclure.

On étend cette définition aux distributions singulières limites de distributions régulières. Nous verrons au paragraphe suivant qu'on peut l'étendre à toutes les distributions singulières.

> Le produit tensoriel des distribution $T(x)$ et $\Theta(y)$ est par définition :
>
> $$< T(x) \otimes \Theta(y), \phi(x,y) > = < T(x), < \theta(y), \phi(x,y) > > .$$

Donnons quelques exemples :

$$\begin{aligned}
< \delta(x) \otimes \delta(y), \phi(x+y) > &= < \delta(x), < \delta(y), \phi(x,y) > \\
&= < \delta(x), \phi(x,0) > \\
&= \phi(0,0),
\end{aligned}$$

et $\delta(x) \otimes \delta(y)$ se note aussi $\delta(x,y)$.

$$< \mathrm{H}(x) \otimes \mathrm{H}(y), \phi(x,y) > = \iint_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} \phi(x,y)\, dxdy,$$

et $< \mathrm{H}(x) \otimes \mathrm{H}(y)$ se note aussi $\mathrm{H}(x,y)$.

$$\begin{aligned}
< T'(x) \otimes\ \Theta(y), \phi(x,y) > &= -< T(x), \frac{d}{dx} < \Theta(y), \phi(x,y) > > \\
&= < T(x) \otimes\ \Theta(y), \frac{\partial}{\partial x} \phi(x,y) > . \\
< T_1(x) \otimes T_2(y), \phi_1(x) \otimes \phi_2(y) > &= < T_1(x), \phi_1(x) >< T_2(y), \phi_2(y) > .
\end{aligned}$$

4.7 Produit de convolution

Le produit de deux distribution n'est pas défini. Le produit d'une distribution par une distribution régulière :

$$< \widetilde{f}\, T, \phi > = < T, f\phi >$$

est défini si $f\phi \in \mathcal{D}$, c'est-à-dire si f est C^∞.

Cherchons donc un produit plus général.

Le produit tensoriel donne une distribution de $\mathcal{D}'_2$. Pour l'appliquer à $\phi \in \mathcal{D}$, on a l'idée de poser $\varphi(x,y) = \phi(x+y)$, mais φ, qui est bien C^∞, n'est pas à support compact, car $a \leq x + y \leq b$ est l'équation d'une bande infinie. Nous y reviendrons grâce au produit de convolution.

4.7.1 Pour les fonctions

Définissons le produit de convolution de deux fonctions f et g de $L^1(\mathbb{R})$, leur **convoluée** $f \star g$:

$$(f \star g)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, g(y-x)\, dx.$$

Le changement de variable $(x,y) \mapsto (y-x, y)$, $d(y-x) = -dx$, montre la commutativité de ce produit ($f \star g = g \star f$) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(y-x)\, dx = \int_{+\infty}^{-\infty} f(y-x)\, g(x)\, (-dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f(y-x)\, dx.$$

Rappelons que $f \star g$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$:

- $h(x,y) = f(x)\, g(y) \in L^1(\mathbb{R})$ car h est localement intégrable et :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} h(x,y)\, dxdy = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx \int_{\mathbb{R}} g(y)\, dy$$

grâce au théorème de Fubini-Tonelli,

- le changement de variables $(x,y) \mapsto (x, y-x)$ est un *difféomorphisme* de jacobien égal à 1.

On déduit de ce qui précéde que $||f \star g||_1 \leq ||f||_1| \, |g||_1$, d'où la continuité du produit de convolution dans L^1. En effet, si $f_n \to f$ et $g_m \to g$ dans L^1, on a :

$$f \star g - f_n \star g_m = f \star (g - g_m) + g_m \star (f - f_n)$$

ce qui permet d'écrire :

$$||f \star g - f_n \star g_m||_1 \leq ||f||_1 \, ||g - g_m||_1 + ||g_m||_1 \, ||f - f_n||_1$$

et de conclure.

4.7.2 Pour les distributions

Définissons maintenant le **produit de convolution** des distributions régulières, $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$, en utilisant Fubini-Tonelli puisque les intégrales existent :

$$\begin{aligned}
< \widetilde{f} \star \widetilde{g}, \phi > &= < \widetilde{f \star g}, \phi > \\
&= \int_{\mathbb{R}} (f \star g)(t) \, \phi(t) \, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x) \, g(t - x) \, dx \Big) \phi(t) \, dt \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x) \, g(t - x) \, \phi(t) \, dx dt \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x) \, g(y) \, \phi(x + y) \, dx dy.
\end{aligned}$$

Nous pouvons écrire :

$$< \widetilde{f} \star \widetilde{g}, \phi >= \int_{\mathbb{R}} f(x) \Big(\int_{\mathbb{R}} g(y) \, \phi(x + y) \, dy \Big) \, dx$$

et, comme $g(y)$ est une constante en x, la fonction :

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} g(y) \, \phi(x + y) \, dy$$

est C^∞, ce qui permet d'écrire, pourvu que ψ soit à support compact :

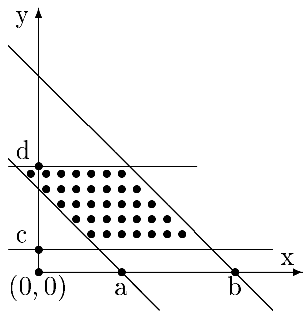
$$< \widetilde{f} \star \widetilde{g}, \phi >=< \widetilde{f}, \psi >,$$

c'est-à-dire :

$$< \widetilde{f} \star \widetilde{g}, \phi >=< \widetilde{f}(x), < \widetilde{g}(y), \phi(x + y) >> .$$

A quelle condition ψ est-elle à support compact ? Le support de ϕ est inclus dans un intervalle $[a, b]$. Une condition pour que $\psi(x)$ ne soit pas nul est que $x + y$ soit dans $[a, b]$.

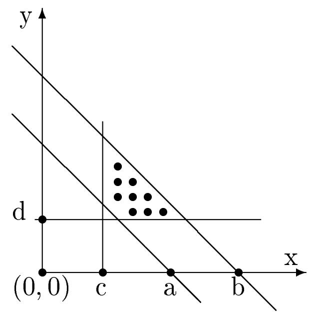
Notons que, lorsque les supports sont bornés à gauche (ou à droite), ψ n'est pas à support compact, mais peut être remplacée par $\psi p \in \mathcal{D}$, p étant une fonction-plateau valant 1 sur $[c, b - d]$. Cette fonction, à support compact, coïncide avec ψ sur le support de f ; les valeurs de ψ pour $x \notin \mathrm{Supp}(f)$ n'interviennent pas dans le calcul de l'intégrale.



La zone pointillée est définie par :

$$\begin{cases} a \leq x + y \leq b \\ c \leq y \leq d. \end{cases}$$

Supp(g) $\subset [c, d]$, compact :
Supp(ψ) $\subset [a - d, b - c]$, compact.



La zone pointillée est définie par :

$$\begin{cases} a \leq x + y \leq b \\ x \geq c,\ y \geq d. \end{cases}$$

Supp(f) et Supp(g) bornés à gauche :
Supp($f\psi$) $\subset [c, b - d]$, compact.

Il suffit donc que ou bien l'une des deux soit à support compact (g pour la figure de gauche) ou bien que les deux soient bornées inférieurement (figure de droite) ou supérieurement (le triangle opposé par le sommet au triangle pointillé).

Le produit de convolution pour les distributions régulières est commutatif.

Si deux distributions singulières sont les limites, respectivement, de $\widetilde{f_n}$ et de $\widetilde{g}_m$ et si les f_n respectent la même condition (par exemple si leurs supports sont tous inclus dans un même compact), donc aussi leur limite, de même pour les g_m et leur limite, on peut passer à la limite par continuité du produit de convolution.

Ceci nous mène à poser, pour des distributions quelconques T et Θ :

$$< T \star \Theta, \phi > = < T(x), < \Theta(y), \phi(x + y) >>$$

si cette écriture a un sens. Reprenons ce que nous avons fait pour le cas régulier. La fonction :

$$\psi(x) = < \Theta(y), \phi(x + y) >$$

est encore C^∞ car $\mathrm{D}^k(\psi(x)) = < \Theta(y), \mathrm{D}_x^k(\phi(x + y)) >$. La discussion sur les supports est toujours valable. Finalement, dans tous les cas :

Si T ou Θ appartient à $\mathcal{D}'_0$ (ou les deux),
ou si T et Θ, appartiennent à $\mathcal{D}'_+$,
ou si T et Θ appartiennent à $\mathcal{D}'_-$,
leur convoluée existe. Elle est définie par :

$$< T \star \Theta, \phi > = < \Theta \star T, \phi > = < T(x), < \Theta(y), \phi(x+y) >> .$$

Les espaces vectoriels $\mathcal{D}'_+$, $\mathcal{D}'_-$ et $\mathcal{D}'_0$ sont stables par convolution.

La distribution de Dirac est l'élément neutre de ce produit :

$$< \delta \star \Theta, \phi > = < \Theta \star \delta, \phi > = < \Theta(x), < \delta(y), \phi(x+y) >> = < \Theta(x), \phi(x) > .$$

On a donc $\delta \star \Theta = \Theta \star \delta = \Theta$, $\delta \star \delta = \delta$, $\delta_a \star \delta_b = \delta_{a+b}$.

Rappelons que $f(x)\,\delta = f(0)\,\delta$, $f(x)\,\delta_a = f(a)\,\delta_a$, mais que $\delta \star f(x) = f(x)$ et que $\delta_a \star f(x) = f(x-a)$.

Nous sommes revenus à notre première idée :

$$< T(x) \star \theta(x), \phi(x) > = < T(x) \otimes \theta(y), \phi(x+y) > .$$

Remarquons que, si $T \star \Theta$ est défini :

$$\begin{aligned} < T \star \Theta', \phi > &= < T(x), < \Theta'(y), \phi(x+y) >> \\ &= < T(x), - < \Theta(y), \phi'(x+y) >> \\ &= - < T \star \Theta, \phi' > \\ &= < (T \star \Theta)', \phi > \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\begin{array}{rcccl} T \star \Theta' & = & (T \star \Theta)' & = & T' \star \Theta, \\ \delta' \star T & = & \delta \star T' & = & T', \\ \delta^{(n)} \star T & = & T^{(n)}. & & \end{array}}$$

Le produit de convolution sur les distributions, s'il est défini, est continu : si $T_n \to T$ et $\Theta_n \to \Theta$ dans $\mathcal{D}'$, on a :

$$< T_n, < \Theta_m(y), \phi >> \to < T, < \Theta_m, \phi >> \to < T, < \Theta, \phi >> .$$

Est-il associatif ? Considérons trois distributions A, B et C. Peut-on écrire :

$$\begin{aligned} < A, < B \star C, \phi >> &= < A(x), < B(y), < C(y,z), \phi(x+y+z) >>> \\ &= < A \star B, < C, \phi >> \end{aligned}$$

et donc $A \star (B \star C) = (A \star B) \star C = A \star B \star C$? La convolution étant commutative, cela nécessite, en changeant l'ordre des facteurs, que les tous les produits

possibles soient définis. Il est donc nécessaire que l'une des conditions suivantes soit respectée :
- les trois distributions appartiennent à $\mathcal{D}'_+$,
- elles appartiennent à $\mathcal{D}'_-$,
- deux (au moins) appartiennent à $\mathcal{D}'_0$.

Montrons la suffisance, d'abord sur des distributions régulières $\widetilde{f}$, $\widetilde{g}$ et $\widetilde{h}$. On a, les K_i étant compacts, et en appliquant Fubini :

$$\begin{aligned}
< \widetilde{f}, < \widetilde{g} \star \widetilde{h}, \phi >> &= \int_{K_1} f(x) \Big(\iint_{K_2} g(y)h(z)\, \phi(x+y+z)\, dydz \Big)\, dx \\
&= \iiint_{K_3} f(x)g(y)h(z)\, \phi(x+y+z)\, dxdydz \\
&= < \widetilde{f} \star \widetilde{g}, < \widetilde{h}, \phi >>
\end{aligned}$$

d'où l'associativité. Si A, B et C sont des limites de distributions régulières, on conclut par continuité du produit de convolution. Or nous verrons au paragraphe *Régularisation* que les distributions régulières sont denses dans $\mathcal{D}'$.

On a donc finalement :

> Les ensembles $\mathcal{D}'_-$, $\mathcal{D}'_+$ et $\mathcal{D}'_0$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Munis de l'addition et du produit de convolution, ce sont des anneaux commutatifs, donc des algèbres commutatives.

Voici un cas de non-associativité :

$$\begin{cases} (\widetilde{1} \star \delta') \star \widetilde{\mathrm{H}} = (\widetilde{1'} \star \delta) \star \widetilde{\mathrm{H}} = 0 \star \widetilde{\mathrm{H}} = 0, \\ \widetilde{1} \star (\delta' \star \widetilde{\mathrm{H}}) = \widetilde{1} \star (\delta \star \widetilde{\mathrm{H}}') = \widetilde{1} \star (\delta \star \delta) = \widetilde{1} \star \delta = \widetilde{1}. \end{cases}$$

provenant du fait que $\widetilde{1} \star \widetilde{\mathrm{H}}$ n'est pas défini, à cause des supports.

4.8 Régularisation

Soient $T \in \mathcal{D}'$ et $T_n = \mathrm{Pl}_{(-n-1,-n)}^{(n,n+1)} T$, Pl étant la fonction-plateau de support $[-n-1, n+1]$, égale à 1 sur $[-n, n]$. On a $\mathrm{Supp} T_n \subset [-n-1, n+1]$ et $T_n \to T$ quand $n \to \infty$. Toute distribution est donc limite d'une suite de distributions à support compact : $\mathcal{D}'_0$ est dense dans $\mathcal{D}'$.

Si $T \in \mathcal{D}'_0$ et $\psi_n \in C^\infty$, la fonction :

$$\psi_n \star T(x) = \int_{\mathbb{R}} T(y)\, \psi_n(x+y)\, dy = < T(y), \psi_n(x+y) >$$

est C^∞ à support compact. Prenons pour ψ_n la fonction ξ_a définie dans 4.3, avec $a = 1/n$. La distribution définie par $\xi_{1/n} \star T$ est régulière à support compact. Passons à la limite :

$$\lim_{n \to \infty} \xi_{1/n} \star T = \delta \star T = T.$$

En effet :

$$\begin{aligned}
< \lim \xi_{1/n} \star T, \phi > &= < \lim \xi_{1/n}, < T, \phi >> \\
&= < \delta, < T, \phi >> \\
&= < \delta \star T, \phi > \\
&= < T, \phi > .
\end{aligned}$$

Nous avons finalement montré que toute distribution singulière est limite d'une suite de distributions régulières à support compact :

$$T = \lim_{n \to \infty} \xi_{1/n} \mathrm{Pl}^{n,n+1)}_{(-n-1,-n)} T.$$

Les distributions régulières à support compact sont denses dans $\mathcal{D}'$.

4.9 Primitive d'une distribution

Une **primitive** d'une distribution T est une distribution Θ dont la dérivée est T. Remarquons que si T est à support minoré ou compact, $\mathrm{H} \star T$ est une primitive de T :

$$(\mathrm{H} \star T)' = \mathrm{H}' \star T = \delta \star T = T.$$

La dérivée de la distribution $\widetilde{1}$ étant la distribution nulle :

$$< \mathrm{D}\widetilde{1}, \phi > = - < \widetilde{1}, \phi' > = \int_{\mathbb{R}} \phi'(x)\, dx = \big[\phi(x)\big]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

deux primitives quelconques diffèrent d'une constante.

Remarquons que si :

$$< \widetilde{1}, \phi > = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, dx = 0$$

et si $\mathrm{Supp}\, \phi = [a, b]$ on a :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t)\, dt = \begin{cases} 0 \quad \text{si } x \leq a \\ \displaystyle\int_a^x \phi(t)\, dt \quad \text{si } x \geq a \\ 0 \quad \text{si } x \geq b \end{cases}$$

de sorte que $\Phi(x)$ appartient à $\mathcal{D}$. Dans ce cas, et dans ce cas seulement, on peut poser :

$$< \Theta, \phi > = - < T, \Phi >$$

car :

$$< \mathrm{D}\Theta, \phi > = - < \Theta, \phi' > = < T, \phi > .$$

Une primitive de $\widetilde{1}$ est $\widetilde{X}$ $(X : x \mapsto x)$:

$$< \mathrm{D}\,\mathrm{X}, \phi > = - < \widetilde{X}, \phi' > = - \int_{\mathbb{R}} x\phi'(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,dx = < \widetilde{1}, \phi > .$$

Cherchons une primitive Θ d'une distribution T non constante : pour tout scalaire λ, $T \neq \lambda\,\widetilde{1}$.

Pour cela, nous allons construire une fonction $\psi \in \mathcal{D}$ telle que :

$$\begin{cases} < T, \psi > = < T, \phi > \\ < \widetilde{1}, \psi > = 0, \end{cases}$$

ce qui nous ramera au premier cas, ψ remplaçant ϕ.

Montrons qu'il existe $h \in \mathcal{D}$ telle que $< T, h > = 0$ et $< \widetilde{1}, h > = 1$.

Ceci est possible si Ker$T$ et Ker$\widetilde{1}$ sont distincts et non inclus l'un dans l'autre. Ce sont des hyperplans, ils ont même dimension, et l'inclusion signifie l'égalité. Or ils ne sont pas égaux.

Considérons en effet l'espace vectoriel F des formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E (de dimension finie ou non) ayant pour noyau un même hyperplan H. Si D est une droite vectorielle supplémentaire de H dans E engendrée par e, on peut écrire :

$$\forall x \in E, \exists 1 a_x \in \mathbb{K} \,:\, x - a_x e \in H$$

et si $u \in F$ on a :

$$u(x) = u(a_x e) = a_x\, u(e)$$

de sorte que u est caractérisée par le scalaire $u(e)$, non nul $(e \notin H)$; F est donc de dimension 1 et deux éléments non nuls de F sont proportionnels.

Il existe donc des fonctions dans Ker$T$ qui ne sont pas dans Ker$\widetilde{1}$. Soit h une telle fonction, que l'on peut choisir telle que $< \widetilde{1}, h > = 1$.

Pour une quelconque $\phi \in \mathcal{D}$, posons :

$$\psi = \phi - < \widetilde{1}, \phi > \ h.$$

On a $\psi \in \mathcal{D}$ et $< \widetilde{1}, \psi > = 0$ de sorte que :

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(x)\,dx$$

appartient à $\mathcal{D}$. On pose enfin :

$$< \Theta, \phi > = - < T, \Psi > .$$

Dérivons :

$$\begin{aligned} < \mathrm{D}\Theta, \phi > &= - < \mathrm{D}T, \Psi > \\ &= < T, \psi > \\ &= < T, \phi > . \end{aligned}$$

Si $< \widetilde{1}, \phi > = 0$, on retrouve la remarque introductive.

Appliquons la méthode pour calculer une primitive de δ.

Prenons pour h une fonction C^∞ de support inclus dans $\mathbb{R}_-$, d'intégrale 1 sur $\mathbb{R}_-$, par exemple $\exp(1/(x(x+1)))$ divisée par son intégrale $(0,007029858...)$ et posons :

$$\psi(x) = \phi(x) - < \widetilde{1}, \phi > \ h(x)$$

de sorte que $< \widetilde{1}, \Psi > = 0$. Enfin :

$$- < \delta, \Psi > = -\Psi(0) = \int_{-\infty}^{0} \psi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} \phi(x)\, dx - < \widetilde{1}, \phi > = < \widetilde{\mathrm{H}}, \phi >$$

ce que nous savions déjà ($\mathrm{D}\widetilde{\mathrm{H}} = \delta$).

4.10 Ordre d'une distribution

Soit $T \in \mathcal{D}$. Supposons qu'il existe des entiers naturels m tels que, pour tout compact K de $\mathbb{R}$ et toute ϕ à support dans K, il existe un scalaire C_K tel que :

$$| < T, \phi > | \ \leq C_K \sup_{j \leq m} ||\phi^{(j)}||_\infty.$$

L'**ordre** de T est le plus petit entier p vérifiant cette condition. Autrement dit, le p_K de la définition de la continuité peut être choisi uniformément, et minimum.

Si l'ordre de T est p, celui de T' est évidemment au plus $p+1$.

Les distributions régulières sont d'ordre 0 ; si $\mathrm{Supp}(\phi) \subset [-a, a]$:

$$| < \widetilde{f}, \phi > | \leq 2a \int_{-a}^{a} f(t)\, dt\, ||\phi||_\infty,$$

et H est d'ordre 0 ; sa dérivée δ est donc d'ordre au plus 1 ; en fait, elle est d'ordre 0 :

$$| < \delta, \phi > | = |\phi(0)| \leq ||\phi||_\infty.$$

La distribution singulière $\mathrm{vp}(\frac{1}{X})$ est d'ordre 1 ; sur un compact K ne contenant pas 0, l'ordre est 0 ; si K contient 0, nous avons vu (4.3.1) que l'ordre est au plus 1 ; on voit qu'il est égal à 1, en considérant les fonctions-plateaux p_n, de support $[0, 2]$, valant 1 sur $[1/n, 1]$:

$$\lim_{n \to \infty} | < \mathrm{vp}(\frac{1}{X}), p_n > | = +\infty$$

or $||p_n||_\infty = 1$, et si l'ordre était 0, cette quantité serait bornée.

La distribution $\delta^{(n)}$ est au plus d'ordre n ; on voit qu'elle est d'ordre n en considérant la fonction $\phi(x) = x^n p$, p étant une fonction-plateau valant 1 en $x = 0$, dont les dérivées en $x = 0$ sont nulles sauf $\phi^{(n)}$.

La distribution :

$$< T, \phi > = \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi^{(n)}(n)$$

(la somme est finie car limitée aux $n \in \mathrm{Supp}(\phi)$) est d'ordre infini car sa restriction au compact $[n-1/2, n+1/2]$ est d'ordre n, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Toute distribution à support compact est d'ordre fini d'après la définition de la continuité.

Si T est à support compact K, d'ordre m, et si ϕ et ses dérivées jusqu'à l'ordre m sont nulles, $< T, \phi > = 0$.

5 Transformation de Fourier

Les distributions, moyennant adaptation, sont bien adaptées à la transformation de Fourier [6].

5.1 Définitions (rappel)

La **transformée de Fourier** d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ est égale à :

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{F}(f): & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & f & \mapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\exp(-ist)\,dt. \end{array}$$

l'intégrale existe puisque $|\exp(-ist)| = 1$. La transformation est évidemment linéaire. On note également cette transformée $\widehat{f}$.

On utilise aussi la transformation conjuguée :

$$\overline{\mathcal{F}}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\exp(ixt)\,dt = \check{f}(t).$$

Remarquons que :

$$||\widehat{f}||_\infty \leq ||f||_1,$$

ce qui montre la continuité de $\mathcal{F}$: si $f_n \to f$ dans $L^1(\mathbb{R})$ (au sens de $|| \ ||_1$), $\widehat{f_n} \to \widehat{f}$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$ (au sens de $|| \ ||_\infty$, norme de la convergence uniforme). De même pour $\overline{\mathcal{F}}$.

5.2 Quelques propriétés

5.2.1 Parité, dérivabilité

N'oublions pas que f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mais que l'on peut étendre $\mathcal{F}$ aux fonctions à valeur complexe en séparant la partie réelle et la partie imaginaire .

6. Joseph Fourier (1768-1830), mathématicien et physicien français.

$$
\begin{array}{|ccll|}
\hline
f \text{ paire} & \Rightarrow & \widehat{f} = \check{f} & \text{réelle et paire} \\
f \text{ impaire} & \Rightarrow & \widehat{f} = -\check{f} & \text{imaginaire pure et impaire} \\
\dfrac{d}{ds}\widehat{f}(s) & = & -i\,\widehat{f_1}(s) & \text{si} \quad f_1(t) = t f(t) \\
\widehat{f'(t)} & = & is\widehat{f}(s) & \\
\widehat{f^{(n)}(t)} & = & (is)^n \widehat{f}(s) & \\
\hline
\end{array}
$$

Comme $\exp(-isx) = \cos sx - i \sin sx$, si f est paire on a :

$$\widehat{f}(s) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\cos sx\,dx$$

qui est paire, et si f est impaire, on a :

$$\widehat{f}(s) = -i \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\sin sx\,dx$$

qui est impaire et imaginaire pure.

Dérivons $\widehat{f}$ (sous le signe somme grâce à la convergence dominée) :

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\widehat{f}(s) &= \frac{d}{ds}\int_{\mathbb{R}} \exp(-ist)\,f(t)\,dt \\
&= -i\int_{\mathbb{R}} \exp(-ist)\,t f(t)\,dt \\
&= -i\widehat{f_1}(s)
\end{aligned}
$$

Calculons enfin la transformée de f' en intégrant par parties :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(f')(s) &= \int_{\mathbb{R}} \exp(-ist)\,\frac{df}{dt}\,dt \\
&= is\int_{\mathbb{R}} \exp(-ist)\,f(t)\,dt \\
&= is\,\widehat{f}(s).
\end{aligned}
$$

5.2.2 Translation et dilatation

Si $t \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(x+t)) &= \exp(ist)\,\widehat{f}(s) \\
\mathcal{F}(f(ax)) &= \frac{1}{|a|}\,\widehat{f}\Big(\frac{s}{a}\Big)
\end{aligned}
}
$$

Montrons la première relation :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(x+t)) &= \int_{\mathbb{R}} f(x+t)\, \exp(-isx)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y)\, \exp(-is(y-t))\, dy \\
&= \exp(ist) \int_{\mathbb{R}} f(y)\, \exp(-isy)\, dy \\
&= \exp(ist)\, \widehat{f}(s)
\end{aligned}$$

et la seconde :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(ax)) &= \int_{\mathbb{R}} f(ax)\, \exp(-isx)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y)\, \exp(-is\frac{y}{a})\, \frac{dy}{a} \\
&= \frac{1}{a}\, \widehat{f}(\frac{s}{a}) \qquad \text{si } a > 0, \\
&= \frac{-1}{a}\, \widehat{f}(\frac{s}{a}) \qquad \text{si } a < 0.
\end{aligned}$$

5.3 Exemples

La fonction $\xi_a(x) = \exp(-a^2x^2)$, $a \neq 0$, et sa transformée de Fourier sont intéressantes pour au moins deux raisons. Calculons d'abord l'intégrale de $\xi_a(x)$. On a d'une part :

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2-y^2)\, dxdy &= \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\, dx \int_{\mathbb{R}} \exp(-y^2)\, dy \\
&= \Big(\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\, dx\Big)^2
\end{aligned}$$

et d'autre part, par passage en coordonnées polaires :

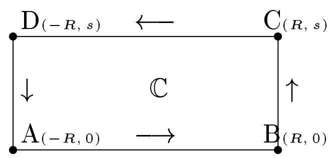
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2-y^2)\, dxdy = \int_0^{+\infty} \exp(-\rho^2)\rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = \pi,$$

d'où : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\, dx = \sqrt{\pi}$.

Attaquons-nous maintenant à la transformée de Fourier :

$$\begin{aligned}
\widehat{\xi_a}(s) &= \int_{\mathbb{R}} \exp(-a^2x^2 - isx)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \exp(-(ax + \frac{is}{2a})^2)\exp(\frac{-s^2}{4a^2})\, dx \\
&= \exp(\frac{-s^2}{4a^2}) \int_{\mathbb{R}} \exp(-(ax + \frac{is}{2a})^2)\, dx \\
&= c(s)\, \exp(\frac{-s^2}{4a^2})
\end{aligned}$$

avec $c(s) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-(ax + \frac{is}{2a})^2)\, dx$. Calculons-le ($\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\, dx = \sqrt{\pi}$).



Posons $z = x + \frac{is}{2a^2}$:

$c(s) = \int_{D_s} \exp(-a^2 z^2)\, dz$

D_s étant la droite $y = s/2a^2$.

La fonction $\exp(-a^2 z^2)$ est holomorphe (dérivable) dans le rectangle $ABCD$, et son intégrale le long de sa frontière est nulle (théorème des résidus) :

$$\int_{ABCD} = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA} = 0.$$

La valeur absolue de l'intégrale sur BC :

$$\left|\int_{BC}\right| = \exp(-a^2 R^2) \left| \int_{t=0}^{s} \exp(\frac{t^2}{4a^2}) \exp(-iR\, t)\, dt \right| \leq \exp(\frac{s^2}{4a^2} - a^2 R^2)$$

tend vers 0 quand $R \to \infty$, de même pour l'intégrale sur DA.

Les intégrales sur AB et sur DC tendent donc vers une limite commune :

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-a^2 x^2)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$$

et finalement :

$$\widehat{\xi_a}(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp(-\frac{s^2}{4a^2}).$$

Un calcul identique donne :

$$\overline{\mathcal{F}}(\xi_a)(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp(\frac{-s^2}{4a^2}).$$

On a pour $a = 1/\sqrt{2}$: $\widehat{\xi_a} = \sqrt{2\pi}\, \xi_a$ (*fonction propre*).

Le résultat suivant nous sera utile :

$$\lim_{a \to 0} \widehat{\xi_a} = 2\pi\delta.$$

Prouvons-le. Pour tout $s \neq 0$, la limite de $\widehat{\xi_a}$ est nulle, l'exponentielle l'emportant sur a^{-1}. Mais son intégrale :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp(-\frac{s^2}{4a^2})\, ds &= \frac{\sqrt{\pi}}{a} \int_{\mathbb{R}} 2a \exp(-t^2)\, dt \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

(avec $s = 2at$) quel que soit a. Cette limite n'est donc pas une fonction mais une distribution, la *masse* 2π étant concentrée à l'origine : $2\pi\delta$.

Calculons la transformée de Fourier de la fonction $f(t) = \exp(-a|t|)$, $a > 0$:

$$\widehat{f}(s) = \int_{\mathbb{R}_+} \exp(-ist)\, \exp(-at)\, dt + \int_{\mathbb{R}_-} \exp(-ist)\, \exp(at)\, dt = \frac{2a}{a^2 + s^2}.$$

Calculons la transformée de la fonction *signal porte* Π, égale à $1/2$ sur $[-1, 1]$ et nulle en dehors :

$$\widehat{\Pi} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \cos st\, dt = \frac{\sin s}{s},$$

$\dfrac{\sin s}{s}$ étant le **sinus cardinal** des tranmissions.

Considérons enfin la fonction $P(x) = 1$ si $x \in [0, 1]$, 0 sinon. On a :

$$\widehat{P}(s) = \frac{1 - \exp(-is)}{is}.$$

La dérivée de P est égale à $\delta - \delta_1$, d'où :

$$\widehat{\delta} - \widehat{\delta_1} = 1 - \exp(-is).$$

Nous verrons que $\widehat{\delta} = 1$, d'où l'on déduit que $\widehat{\delta_1} = \exp(-is)$, puis que $\widehat{\delta'} = is$, et $\widehat{\delta_1'} = is \exp(-is)$.

5.4 Transformation de Fourier et convolution

Calculons la transformée de $f \star g$ (en posant $x = y + t$, $dx = dy$) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f \star g) &= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x - t) g(t)\, dt \Big) \exp(-isx)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y) \Big(\int_{\mathbb{R}} g(t)\, \exp(-ist)\, dt \Big) \exp(-isy)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y)\, \exp(-isy)\, dy \int_{\mathbb{R}} g(t)\, \exp(-ist)\, dt
\end{aligned}$$

f et g étant dans L^1, ce qui donne :

$$\boxed{\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}(f)\, \mathcal{F}(g)}$$

Comme précédemment, pour la dérivation et la convolution, on souhaite faire passer la transformation de Fourier du côté *distribution* au côté *fonction*, de gauche à droite :

$$< \mathcal{F}T, \phi > = < T, \mathcal{F}\phi > .$$

Il faut donc que les transformées de Fourier des fonctions-test soient elles-mêmes des fonctions-test. Cela sera vu plus loin (*distributions tempérées*).

5.5 Saut du chapeau

Montrons que, si f et g sont bornées et dans $L^1(\mathbb{R})$, on a :

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)\, g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \widehat{g}(x)\, dx}$$

Ces intégrales existent car, pour la première :

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(t)\, \exp(-itx)\, dt \Big)\, g(x)\, dx\right| \leq \left|\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt\right| \left|\int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx\right|$$

et de même pour la seconde.

Ensuite, la fonction $h(t,x) = f(t)\, g(x)\, \exp(-itx)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ car :

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} |f(t)\, \exp(-itx)\, g(x)|\, dtdx &\leq \iint_{\mathbb{R}^2} |f(t)\, g(x)|\, dtdx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\, dx \end{aligned}$$

et Fubini-Tonelli donne :

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} h(t,x)\, dtdx &= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(t)\, \exp(-itx)\, dt \Big)\, g(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} g(x)\, \exp(-itx)\, dx \Big)\, f(t)\, dt, \end{aligned}$$

ce que nous voulions démontrer.

5.6 Transformation inverse

Calculons $(\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F})(f)$, $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, bornée :

$$\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f}(x)) = \int_{\mathbb{R}} \exp(isx)\, \widehat{f}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f \circ \tau_x}(s)\, ds.$$

Cette intégrale est absolument convergente (Fubini-Tonelli). La fonction $\xi_a(x) = \exp(-a^2x^2)$, que nous avons étudiée après avoir défini la transformée de Fourier, est telle que :

$$\begin{cases} |\xi_a(x)| & \leq 1, \\ \lim\limits_{a\to 0} \xi_a(x) & = 1, \\ \lim\limits_{a\to 0} \widehat{\xi_a} & = 2\pi\delta. \end{cases}$$

Nous avons donc par *saut du chapeau* :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f \circ \tau_x}(s)\, ds &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{a \to 0} \xi_a(s)\, \widehat{f \circ \tau_x}(s)\, ds \\ &= < \lim_{a \to 0} \xi_a(s), \widehat{f \circ \tau_x}(s) > \\ &= < \lim_{a \to 0} \widehat{\xi_a(s)}, f \circ \tau_x(s) > \\ &= < 2\pi\delta(s), f(s+x) > \\ &= 2\pi f(x).\end{aligned}$$

On en déduit que $\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = 2\pi \mathrm{Id} = \mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}}$, c'est-à-dire :

Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$:

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\, \overline{\mathcal{F}}}$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{ll} \text{si } f \text{ est paire} & \mathcal{F}^2(f) = 2\pi f \\ \text{si } f \text{ est impaire} & \mathcal{F}^2(f) = -2\pi f. \end{array}$$

En notant $f(-x) = f_-(x)$, on a donc dans tous les cas :

$$\mathcal{F}^2(f) = 2\pi f_-$$

et donc $\mathcal{F}^4 = 4\pi^2\, \mathrm{Id}$, et $\mathcal{F}^3 = 2\pi\sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}^{-1}$.

On utilise la convolution en physique et dans les transmissions. Or :

$$f \star g = \frac{1}{2\pi}\, \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f}\, \widehat{g}),$$

et le calcul de la seconde écriture demande moins de temps que celui de la première à partir de la définition.

Calculons par exemple $\xi_a \star \xi_b$, en rappelant que $\xi_a(x) = \exp(-ax^2)$ et que $\widehat{\xi_a}(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp(-\frac{s^2}{4a^2})$:

$$\begin{aligned}\xi_a \star \xi_b &= \frac{1}{2\pi} \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}(\xi_a \star \xi_b) \\ &= \frac{1}{2\pi} \overline{\mathcal{F}}\Big(\mathcal{F}(\xi_a)\, \mathcal{F}(\xi_b)\Big) \\ &= \frac{1}{2ab} \overline{\mathcal{F}}\Big(\exp(-(\frac{s^2}{4} \frac{a^2+b^2}{a^2b^2}))\Big) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a^2+b^2}}\, \exp(-t^2 \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}).\end{aligned}$$

5.7 Application aux E.D.O.

En $t = 0$, on alimente un circuit RL avec un courant continu, de tension E volts. L'intensité $I(t)$ du courant dans le circuit est solution de l'équation différentielle linéaire :

$$R\,I(t) + L\,\frac{d}{dt}I(t) = E\,\mathrm{H}(t).$$

Appliquons la transformation de Fourier à cette équation :

$$R\,\widehat{I}(s) - L\,is\,\widehat{I}(s) = E\,\widehat{\mathrm{H}}(s),$$

d'où :

$$\widehat{I}(s) = \frac{E}{R - iLs}\,\widehat{\mathrm{H}}.$$

Pour utiliser la relation :

$$\mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(f \star g),$$

calculons :

$$\mathcal{F}^{-1}(\frac{E}{R - iLs}) = \mathcal{F}^{-1}(\frac{R}{R^2 + L^2s^2}) + \mathcal{F}^{-1}(\frac{iLs}{R^2 + L^2s^2}).$$

Grâce au résultat déjà calculé :

$$\mathcal{F}(\exp(-a|x|))(s) = \frac{2a}{a^2 + s^2} \quad (a \in \mathbb{R}_+^*)$$

on obtient avec $a = R/L$:

$$\mathcal{F}^{-1}(\frac{R}{R^2 + L^2s^2}) = \frac{1}{2L}\,\exp(-R|x|/L)$$

et par dérivation :

$$\mathcal{F}(\frac{d}{dx}\exp(-R|x|/L)) = \frac{-2iLRs}{R^2 + L^2s^2}$$

d'où :

$$\mathcal{F}^{-1}(\frac{iLs}{R^2 + L^2s^2}) = \frac{-1}{2R}\,\frac{d}{dx}\exp(-R|x|/L)$$

et :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(I) &= \mathcal{F}\Big(\frac{1}{2L}\,\exp(-R|x|/L) - \frac{1}{2R}\,\frac{d}{dx}\exp(-R|x|/L)\Big)\,\mathcal{F}(\mathrm{H}) \\
&= \mathcal{F}\Big(\frac{1}{2L}\,\exp(-R|x|/L) - \frac{1}{2R}\,\frac{d}{dx}\exp(-R|x|/L) \star \mathrm{H}\Big) \\
I(t) &= \Big((\frac{1}{2L} - \frac{1}{2R}\,\frac{d}{dx})(\exp(-R|x|/L))\Big) \star \mathrm{H}(x).
\end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(-R|x|/L))\,\mathrm{H}(t-x), \\ g(x) &= \frac{d}{dx}(\exp(-R|x|/L))\,\mathrm{H}(t-x). \end{aligned}$$

Le support de $\mathrm{H}(t-x)$ est égal à $]-\infty, t[$.

Pour $t < 0$ nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx &= \frac{L}{R}\exp(Rt/L), \\ \int_{-\infty}^{t} g(x)\,dx &= \exp(Rt/L), \end{aligned}$$

d'où :

$$I(t) = 0 \quad (t < 0).$$

Et pour $t > 0$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{t} f(x)\,dx\,dx \\ &= \frac{L}{R} - \frac{L}{R}(\exp(-Rt/L) - 1) \\ &= \frac{L}{R}(2 - \exp(-Rt/L)), \\ \int_{-\infty}^{t} g(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{0} g(x)\,dx + \int_{0}^{t} g(x)\,dx \\ &= 1 + \exp(-Rt/L) - 1 \\ &= \exp(-Rt/L) \end{aligned}$$

d'où :

$$I(t) = \frac{E}{R}(1 - \exp(-Rt/L)) \quad (t > 0).$$

Remplaçons E par $E\exp(i\omega t)$. Reprenons les calculs pour arriver à :

$$I(t) = \Big((\frac{1}{2L} - \frac{1}{2R}\frac{d}{dx})(\exp(-R|x|/L))\Big) \star \mathrm{H}(x)\ \exp(i\omega x).$$

Posons :

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(-R|x|/L))\,\mathrm{H}(t-x)\ \exp(i\omega(t-x)), \\ g(x) &= \frac{d}{dx}(\exp(-R|x|/L))\,\mathrm{H}(t-x)\ \exp(i\omega(t-x)). \end{aligned}$$

Pour $t \leq 0$ nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx &= \frac{LR + i\,L^2\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\,\exp(Rt/L), \\
\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx &= \frac{LR + i\,L^2\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\,\exp(i\omega t), \\
\int_{-\infty}^{t} g(x)\,dx &= \frac{R^2 + i\,LR\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\,\exp(Rt/L), \\
\int_{-\infty}^{0} g(x)\,dx &= \frac{R^2 + i\,LR\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\,\exp(i\omega t),
\end{aligned}$$

d'où :

$$I(t) = 0 \quad (t \leq 0).$$

puis pour $t > 0$:

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{t} f(x)\,dx &= \exp(i\omega t)\int_0^t \exp(-Rx/L - i\omega x)\,dx \\
&= \frac{-LR + i\,L^2\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\,(\exp(-Rt/L) - \exp(i\omega t) \\
\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^t f(x)\,dx \\
&= \frac{LR + i\,L^2\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\,\exp(i\omega t) + \frac{LR - i\,L^2\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\,(\exp(i\omega t) - \exp(-Rt/L)) \\
\int_{0}^{t} g(x)\,dx &= \frac{R^2 - i\,LR\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\,(\exp(-Rt/L) - \exp(i\omega t) \\
\int_{-\infty}^{t} g(x)\,dx &= \frac{R^2 + i\,RL\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\,\exp(i\omega t) + \frac{R^2 - i\,RL\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\,(\exp(-Rt/L) - \exp(i\omega t))
\end{aligned}$$

d'où :

$$I(t) = \frac{E\,(R - iL\omega)}{R^2 + L^2\omega^2}\,(\exp(i\omega t) - \exp(-Rt/L).$$

On obtient donc, selon que l'on remplace E par $E\cos\omega t$ ou par $E\sin\omega t$:

$$\begin{cases}
I_c(t) = \dfrac{ER}{R^2 + L^2\omega^2}\,(\cos\omega t - \exp(-Rt/L)) + \dfrac{EL\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\,\sin\omega t \\
I_s(t) = \dfrac{ER}{R^2 + L^2\omega^2}\,\sin\omega t - \dfrac{EL\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\,(\cos\omega t - \exp(-Rt/L))
\end{cases}$$

et pour $E\sin(\omega t + \phi)$: $I(t) = \sin\phi\, I_c(t) + \cos\phi\, I_s(t)$.

Pour un problème simple comme ce dernier, l'utilisation de la transformée de Fourier semble pénible, mais le résultat, qui dépend de R, L, E et ω, peut être mis en mémoire et utilisé pour tous les circuits identiques. Elle plus utile dans la résolution des E.D.P. La transformation de Laplace (vue plus loin) est très utilisée.

6 Distributions tempérées

Nous voulons définir la transformée de Fourier d'une distribution, en faisant passer la transformation, comme pour la dérivation ou la convolution, de gauche, côté distribution, à droite, côté fonction.

6.1 Fonctions-test

La transformation de Fourier d'une fonction à support compact n'étant pas à support compact, il faut changer de fonctions-test, et remplacer $\mathcal{D}$ par un espace vectoriel de fonctions C^∞ stable par $\mathcal{F}$. Toutes les fonctions considérées dans la suite seront C^∞.

Si $f_1(x) = xf(x)$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$, on peut *dériver sous le signe somme* :

$$\frac{d}{ds}\mathcal{F}(f)(s) = -i\,\mathcal{F}(f_1)(s).$$

Ceci montre que $\widehat{f}$ est C^∞ si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n(x) = x^n f(x)$ est intégrable, donc si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_n(x) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire si f est à décroissance rapide :

Une fonction f est à **décroissance rapide** si :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{x\to\pm\infty} x^n f(x) = 0.$$

L'ensemble des fonctions C^∞ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées est un espace vectoriel, appelé **espace de Schwarz** [7] et noté $\mathcal{S}$. On a évidemment $\mathcal{D} \underset{\neq}{\subset} \mathcal{S}$, de sorte que $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$.   L'ensemble de telles fonctions est un espace vectoriel stable par produit interne, par multiplication par les polynômes et par dérivation.

Une fonction à décroissance rapide est bornée, intégrable, donc aussi ses puissances, qui sont à décroissance rapide. Elle est donc dans L^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Si f est à décroissance rapide, toutes les fonctions $f_n(x)$ sont aussi à décroissance rapide, de sorte que $\widehat{f}$ existe et qu'elle est C^∞.

Nous voulons que $\widehat{f}$ soit intégrable, pour appliquer la fransformation réciproque. A partir de $\widehat{f'}(s) = -is\,\widehat{f}(s)$, on obtient par itération :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \widehat{f^{(n)}}(s) = -is\widehat{f^{(n-1)}}(s) = \cdots = (-i)^n s^n \widehat{f}(s)$$

et pour que les dérivées à tous les ordres tendent vers 0 à l'infini, on doit avoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\widehat{f}(s)| << \frac{1}{s^n},$$

pour s assez grand.

En dérivant sous le signe somme on obtient, si $f_n(x) = x^n f(x)$:

$$\begin{cases} \mathrm{D}\widehat{f} & = \widehat{f_1}, \\ \dots & \\ \mathrm{D}^n \widehat{f} & = \widehat{f_n}, \end{cases}$$

et $\widehat{f}$ est donc C^∞.

Montrons que :

$$\boxed{f \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}.}$$

Pour cela, utilisons les relations $\widehat{\mathrm{D}^m f} = (-i)^m s^m \widehat{f}(s)$ et $\mathrm{D}^n \widehat{f} = \widehat{f_n}$:

$$\begin{aligned} |s^m \mathrm{D}^n \widehat{f}(s)| &= |s^m \widehat{f_n}(s)| \\ &= |\widehat{\mathrm{D}^m f_n}(s)| \\ &\leq |\int_{\mathbb{R}} \mathrm{D}^m (x^n f(x))\, dx| \\ &\leq A_{m,n}(f) \end{aligned}$$

et $A_{m,n}(f)$ est définie puisque $\mathrm{D}^m(x^n f(x)) \in \mathcal{S}$. On a pour tout couple (n, m) d'entiers naturels :

$$\forall s \in \mathbb{R}\ |s^m \mathrm{D}^n \widehat{f}(s)| \leq A_{m,n}(f),$$

ce qui implique que $\lim_{|s| \to +\infty} (s^m \mathrm{D}^n \widehat{f}(s)) = 0$, c'est-à-dire que $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}$.

La fonction $f(x) = \exp(x^2)$, localement intégrable, définit une distribution régulière $\widetilde{f} \in \mathcal{D}'$ qui n'appartient pas à $\mathcal{S}'$. En effet, $\phi(x) = \exp(-x^2)$ est à décroissance rapide et $f\phi = 1$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc $\mathcal{S}' \neq \mathcal{D}'$: l'inclusion est bien stricte.

Définissons la convergence dans $\mathcal{S}$:

$$\boxed{f_p, f \in \mathcal{S} \,:\, f_p \to f \iff \forall m, n \in \mathbb{N} \,:\, \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m \mathrm{D}^n (f - f_p)(x)| \to 0}$$

Montrons la continuité de $\mathcal{F}$ et de $\overline{\mathcal{F}}$, c'est-à-dire que $f_p \to f$ dans $\mathcal{S}$ entraîne que $|\mathcal{F}(f_p - f)| \to 0$. Posons $f_{p,m} = x^m f_p$:

$$|s^m \mathrm{D}^n \mathcal{F}(f_p - f)(s)| \leq A_{m,n}(f_p - f)$$

or $A_{m,n}(f_p - f)$ est bien définie puisque $f_p - f \in \mathcal{S}$. On a donc :

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} |s^m \mathrm{D}^n \mathcal{F}(f_p - f)(s)| \to 0,$$

et $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ sont continues.

La transformation de Fourier est un automorphisme bicontinu de $\mathcal{S}$, et :

$$\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathcal{F}} \qquad \text{(voir 5.6)}$$

La convolution est une opération dans $\mathcal{S}$:

$$f, g \in \mathcal{S} \Rightarrow f \star g \in \mathcal{S}.$$

En effet, si $f, g \in \mathcal{S}$, leurs transformées de Fourier $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$ existent, appartiennent à $\mathcal{S}$, de même que leur produit $\widehat{f}\,\widehat{g}$ et l'image réciproque de ce dernier :

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}\,\widehat{g}) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f \star g}) = f \star g.$$

On en déduit que :

$(\mathcal{S}, +, \star)$ est un anneau commutatif, d'élément neutre δ.

6.2 Distributions tempérées

Les **distributions tempérées** sont les éléments de $\mathcal{S}'$, c'est-à-dire les formes linéaires continues sur $\mathcal{S}$. Dans la suite de la section 6, ϕ désignera toujours une fonction quelconque de $\mathcal{S}$, et T une distribution tempérée quelconque.

Une fonction f est à **croissance lente** si :

$$\exists P \in \mathbb{R}[X] \;:\; \lim_{x\to\infty} |\frac{f(x)}{P(x)}| \leq 1.$$

L'ensemble de telles fonctions est un espace vectoriel $\mathcal{L}$ stable par produit interne ou par multiplication par tout polynôme. Si $f \in \mathcal{L}$ et $\phi \in \mathcal{S}$, $f\phi \in \mathcal{S}$.

Une fonction f à croissance lente définit une forme linéaire $\widetilde{f}$ sur $\mathcal{S}$:

$$< \widetilde{f}, \phi > = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \phi(x)\, dx$$

car $f\phi \in \mathcal{S}$. Elle est continue car si $\phi_n \to \phi$, $\phi - \phi_n \to 0$ uniformément et :

$$< \widetilde{f}, \phi > - < \widetilde{f}, \phi_n > = < \widetilde{f}, \phi - \phi_n > \to 0.$$

Une telle distribution tempérée est dite **régulière**. Les autres, comme δ :

$$< \delta, \phi > = \phi(0)$$

sont **singulières**.

Une forme linéaire sur $\mathcal{S}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{D}$ puisque $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$. Les distributions tempérées sont des distributions, et elles ont toutes les propriétés démontrées pour les distributions. Mais, en plus, elles bénéficient de la transformation de Fourier.

Donnons des exemples de distributions non tempérées : $\widetilde{f}$ si $f(x) = \exp|x|$, $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \exp(n)\, \delta_n$...

6.3 Transformation de Fourier

Nous voudrions définir la **transformée de Fourier** de $T \in \mathcal{S}'$ par :

$$< \widehat{T}, \phi > = < T, \widehat{\phi} > .$$

Pour une distribution régulière, cela s'écrit :

$$< \widehat{\widetilde{f}}, \phi > = < \widetilde{f}, \widehat{\phi} >,$$

c'est-à-dire, par *saut du chapeau* :

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)\, \phi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \widehat{\phi}(x)\, dx.$$

Pour une distribution singulière T, limite d'une suite de distributions régulières u_{f_n}, on a :

$$\lim < \widehat{\widetilde{f}_n}, \phi > = \lim < \widetilde{f}_n, \widehat{\phi} > = < T, \widehat{\phi} >$$

ce qui nous mène à poser par définition, que la distribution tempérée soit régulière ou singulière :

$$\boxed{< \widehat{T}, \phi > = < T, \widehat{\phi} >}$$

La transformation de Fourier sur les distributions tempérées est ainsi continue.

Les équations :

$$\begin{aligned} \widehat{f}(0) &= <\delta, \widehat{f}> \\ &= <\widehat{\delta}, f> \end{aligned}$$

et :

$$\widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt = <1, f>$$

montrent que $\widehat{\delta} = 1$. De même, la suite d'équations :

$$\begin{aligned} \widehat{f}(a) &= \int_{\mathbb{R}} \exp(-iat) f(t)\, dt \\ &= <\delta_a, \widehat{f}> \\ &= <\widehat{\delta_a}, f> \end{aligned}$$

montre que :

$$\boxed{\widehat{\delta_a} = \exp(-ias), \quad \widehat{\delta} = 1}$$

Calculons la transformée de Fourier de la distribution $\widetilde{\mathrm{H}}$. Nous savons que $\mathrm{D}\widetilde{\mathrm{H}} = \delta$, et donc que $\mathcal{F}(\mathrm{D}\,\widetilde{\mathrm{H}}) = 1$. De $\mathcal{F}(\mathrm{D}\,\widetilde{\mathrm{H}})(x) = -ix\,\mathcal{F}(\widetilde{\mathrm{H}})(x)$, nous déduisons que $-ix\,\mathcal{F}(\widetilde{\mathrm{H}})(x) = 1$.

Cherchons les solutions de l'équation $X\Delta = 1$. Nous avons vu, dans 4.3.1, que $\Delta = \mathrm{vp}(\dfrac{1}{X})$ en est une. La solution générale sera obtenue en ajoutant la solution générale de l'équation $X\Delta = 0$. Le support de $X\Delta$ est vide, ce qui implique que celui de Δ est $\{0\}$ si $\Delta \neq 0$. Nous verrons un peu plus loin qu'une telle distribution est de la forme $\sum c_n \delta^{(n)}$. Pour qu'elle s'annule sur toute ϕ chaque $c_n\delta^{(n)}$ doit être nulle :

$$< X\delta^{(n)}, \phi > = < \delta^{(n)}, X\phi > = n\phi^{(n-1)}(0)$$

implique $c_n = 0$ pour $n \geq 1$. Il ne reste que $c_0\delta$.

Si $\phi(x) = \exp(-x^2/2)$, on a $\widehat{\phi}(s) = \sqrt{2\pi}\exp(-s^2/2)$ et :

$$< \mathcal{F}(\widetilde{\mathrm{H}}), \phi > = < \widetilde{\mathrm{H}}, \widehat{\phi} > = \sqrt{2\pi}\ < \widetilde{\mathrm{H}}, \phi >$$

or, ϕ étant paire :

$$< \widetilde{\mathrm{H}}, \phi > = \int_{\mathbb{R}_+} \phi(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \exp(-isx)\phi(x)\, dx_{|s=0} = \frac{1}{2}\widehat{\phi}(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

et on a :

$$< \mathcal{F}(\widetilde{\mathrm{H}}), \phi > = \pi = < \pi\,\delta, \phi >,$$

et donc $c_0 = \pi$:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathcal{F}(\widetilde{\mathrm{H}}) & = & \pi\delta + i\,\mathrm{vp}(\dfrac{1}{X}) \\ \mathcal{F}(\widetilde{\mathrm{H}_-}) & = & \pi\delta - i\,\mathrm{vp}(\dfrac{1}{X}) \\ \mathcal{F}(1) & = & 2\pi\delta \\ \mathcal{F}(\widetilde{\mathrm{S}}) & = & 2i\,\mathrm{vp}(\dfrac{1}{X}) \end{array}}$$

Nous déduisons de ce résultat et du fait que $\mathcal{F}^2\widetilde{\mathrm{H}} = 2\pi\widetilde{\mathrm{H}_-}$:

$$\mathcal{F}^2(\widetilde{\mathrm{H}}) = i\widehat{\mathrm{vp}(\frac{1}{X})} + \pi = \widetilde{\mathrm{H}_-}$$

d'où la transformée de Fourier de la distribution tempérée $\mathrm{vp}(\dfrac{1}{X})$:

$$\boxed{\mathcal{F}(\mathrm{vp}(\frac{1}{X})) = -i\pi(2\,\widetilde{\mathrm{H}} - \widetilde{1}) = i\pi\,\widetilde{\mathrm{S}}}$$

7 Distributions à support compact

Notons $\mathcal{E} = C^\infty(\mathbb{R})$.

Nous connaissons $\mathcal{D}'_0$, espace vectoriel des distributions à support compact en tant que formes linéaires continues sur $\mathcal{D}$. Si $T \in \mathcal{D}'_0$ a son support contenu dans un compact K et si Pl est une fonction-plateau valant 1 sur K, on a $Pl\,T = T$ car :

$$< T, \phi > = \int_K T\,\mathrm{Pl}\,\phi > = < \mathrm{Pl}\,T, \phi >,$$

et si $\phi \in \mathcal{E}$, $\mathrm{Pl}\,\phi$ appartient à $\mathcal{D}$, et on peut écrire :

$$< T, \phi > = < \mathrm{Pl}\,T, \phi > = < T, \mathrm{Pl}\,\phi >,$$

Ce qui montre que T peut être considéré comme appartenant à $\mathcal{E}'$.

Réciproquement, si $T \in \mathcal{E}'$, c'est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}$, donc aussi sur $\mathcal{E}$. On peut donc identifier $\mathcal{D}'_0$ et $\mathcal{E}'$.

Ainsi δ est une distribution à support compact (et même ponctuel).

Une distribution à support compact est évidemment tempérée :

$$\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}',$$

chaque espace étant dense dans le suivant. En effet, si $\Delta \in \mathcal{D}'$ ou $\mathcal{S}'$, on a :

$$T_n = \mathrm{Pl}^{(n,n+1)}_{(-n-1,-n)}\,T \to T$$

et T_n est à support compact.

Toute distribution T à support $\{0\}$ est une combinaison linéaire de $\delta^{(n)}$. Elle est d'ordre fini m. Pour $\phi \in \mathcal{D}$, on a au voisinage de 0 :

$$\phi(x) = \sum_{0 \leq n \leq m} \phi_n x^n + x^{m+1}\psi(x)$$

pour une certaine fonction $\psi \in \mathcal{D}$; $\alpha(x) = x^{m+1}\psi(x)$ ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre m sont nulles sur le support de T, et $< T, \alpha >= 0$ (cf. 4.10), de sorte que, X désignant l'identité ($X : t \mapsto t^n$, $X^n : x \mapsto x^n$) :

$$< T, \phi >= \sum_{0 \leq n \leq m} < T, \phi_n X^n >,$$

or, comme $< \delta^{(p)}, X^n >= 0$ si $p \neq n$ et $< \delta^{(n)}, X^n >= (-1)^n n!$, on a, si $< \Delta, X^n >= a_n$:

$$< T, X^n >= \frac{a_n}{(-1)^n n!} < \delta^{(n)}, X^n >$$

et donc :

$$T = \sum_{0 \leq n \leq m} \frac{a_n}{(-1)^n n!} \, \delta^{(n)}.$$

On passe par translation au cas d'un support ponctuel quelconque $\{a\}$:

$$T = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k a_k}{k!} \, \delta_a^{(k)}.$$

7.1 Séries de Fourier

Si $T \in \mathcal{D}'_0$ est une distribution de support compact $K \subset [a, b]$, on peut la prolonger en une **distribution périodique**, somme de ses translatées :

$$T_\theta = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Delta \circ \tau(n\theta)$$

de période $\theta \geq b - a$. Notons $\mathcal{D}'_\theta$ l'espace vectoriel des distributions périodiques de période θ. Ainsi le peigne $\mathrm{P}_T = \sum \delta_{n\theta}$ prolonge Dirac. Réciproquement, la restriction à une seule période d'une distribution périodique donne une distribution à support compact.

La famille orthornormée $(\frac{1}{\sqrt{\theta}} \exp(\frac{2i\pi nx}{\theta}))_{n \in \mathbb{Z}}$ est dense dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathcal{L}^1_{loc}$ de période $\theta \in \mathbb{R}^*_+$, lui-même dense dans l'espace vectoriel des distributions périodiques. On peut mettre toute $\Delta \in \mathcal{D}'_T$ sous la forme :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \exp(\frac{2i\pi nx}{\theta}), \quad c_n \in \mathbb{C}.$$

La famille étant orthonormée, les **coefficients de Fourier** c_n sont égaux à :

$$c_n = \frac{1}{\theta} \ < \Delta, \exp(\frac{-2i\pi nx}{\theta}) > .$$

Calculons les coefficients de Fourier de $\widetilde{1}$, considérée comme de période $\theta > 0$:

$$c_n(\widetilde{1}) = \frac{1}{\theta} \int_\theta \exp(\frac{-2i\pi nx}{\theta})\, dx = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0, \\ 0 \text{ si } n \neq 0. \end{cases}$$

Puis ceux du peigne de période θ, P_θ :

$$c_n(\mathrm{P}_\theta) = \frac{1}{\theta} \ < \sum_m \delta_{m\theta}, \exp(\frac{-2i\pi nx}{\theta}) > = \frac{1}{\theta},$$

puisque les termes en $m \neq n$ sont nuls, de sa dérivée :

$$c_n(\mathrm{P}'_\theta) = \frac{1}{\theta} < \sum_m \delta_{m\theta}, \frac{d}{dx} \exp(\frac{-2i\pi nx}{\theta}) > = -\frac{2i\pi n}{\theta^2},$$

et de $\mathrm{P}_\theta^{(k)}$:

$$c_n(\mathrm{P}_\theta^{(k)}) = -\frac{(2i\pi n)^k}{\theta^{k+1}}.$$

Le cadre des distributions est bien adapté aux séries de Fourier : la série de T' est la dérivée de celle de T. La seule limitation est la croissance lente (majoration par un polynôme).

8 Transformée de Laplace

8.1 Transformée de Laplace des fonctions

Dans la suite, les fonctions considérées seront nulles sur $\mathbb{R}_- \setminus \{0\}$, mais pas forcément en 0, et telles que $|f(t)| \exp(-\alpha t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ pour certaines valeurs de α. Une fonction $f(t)$ nulle pour $t < 0$ est dite **causale**.

La **transformée de Laplace**[8] d'une fonction f (causale) de $t \in \mathbb{R}$ est la fonction $\mathcal{L}\{f\}$ de la variable complexe p :

$$\mathcal{L}\{f\}(p) = \int_{\mathbb{R}_+} \exp(-pt)\, f(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} \exp(-pt)\, f(t)\, dt$$

notée parfois F.

Si $p = \alpha + i\beta$, l'**abscisse de convergence** α_0 est la borne inférieure des α pour lesquels l'intégrale converge.

On calcule sans peine les transformées de 1 : $1/p$, de t^n : $n!/p^{n+1}$, pour lesquelles $\alpha_0 = 0$, et de e^{at} : $1/(p-a)$, avec $\alpha_0 = a$.

8. Pierre Simon de Laplace (1749-1827), mathématicien et astronome français.

La transformée de Laplace est définie sur un ensemble de fonctions plus grand que la transformée de Fourier.

La transformation de Laplace est injective et admet une réciproque, mais l'utilisation de la formule d'inversion :

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{D_a} \exp(tz) \mathcal{L}\{f\}(z)\, dz, \quad D_a = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \Re z = a\}, \\ a \text{ étant tel que l'abscisse des pôles éventuels de} \\ \text{la fonction } \exp(zt)\mathcal{L}\{f\}(z) \text{ soit inférieure à } a, \end{cases}$$

est peu pratique (méthode des résidus), d'autant que la lecture des tables (de transformées de Laplace) de droite à gauche suffit généralement.

Si f est périodique, de période 1 sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} \exp(-pt)\, f(t)\, dt &= \int_0^1 \exp(-p(n+t))\, f(t)\, dt \\ &= \exp(-pn) \int_0^1 \exp(-pt)\, f(t)\, dt \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \exp(-pt)\, f(t)\, dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \exp(-pn) \int_0^1 \exp(-pt)\, f(t)\, dt \\ &= \frac{1}{1 - \exp(-p)} \int_0^1 \exp(-pt)\, f(t)\, dt, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit les transformées des fonctions :

$$\begin{cases} \exp(2ni\pi t) \mapsto \dfrac{p + 2ni\pi}{p^2 + 4n^2\pi^2}, & \alpha_0 = 0, \\ \cos(2n\pi t) \mapsto \dfrac{p}{p^2 + 4n^2\pi^2}, & \alpha_0 = 0, \\ \sin(2n\pi t) \mapsto \dfrac{2n\pi}{p^2 + 4n^2\pi^2}, & \alpha_0 = 0. \end{cases}$$

Les propriétés qui vont nous servir, outre la linéarité évidente, sont les liens avec la dérivation ($D = d/dt$) et la convolution (f et g sont nulles sur $\mathbb{R}_- \setminus \{0\}$, donc aussi $f \star g$, mais pas forcément en 0) :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}\{Df\}(p) &= p\,\mathcal{L}\{f\}(p) - f(0), \quad (D = d/dt), \\ \mathcal{L}\{\int_0^t f(u)\, du\}(p) &= \frac{1}{p}\,\mathcal{L}\{f\}(p), \\ \mathcal{L}\{D^n f\}(p) &= p^n\,\mathcal{L}\{f\}(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1}\, D^k f(0), \\ \mathcal{L}\{f \star g\} &= \mathcal{L}\{f\}\,\mathcal{L}\{g\}. \end{aligned}}$$

Démontrons le premier point en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \exp(-pt)\, Df(t)\, dt &= \Big[\exp(-pt)\, f(t)\Big]_0^{+\infty} \\ &\quad - \int_0^{+\infty} (-p\, \exp(-pt))\, f(t)\, dt \\ &= f(0) + p \int_0^{+\infty} (\exp(-pt))\, f(t)\, dt.\end{aligned}$$

Le deuxième est une conséquence du premier. Si :

$$F(t) = \int_0^t f(u)\, du, \quad F(0) = 0, \quad DF = f,$$

on a :

$$\mathcal{L}\{F\}(p) = \frac{1}{p}\, \mathcal{L}\{f\}(p).$$

Le troisième se prouve par récurrence sur n. Elle est vérifiée pour $n = 1$. Supposons-la vérifiée pour $n - 1$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{D^n f\}(p) &= p\, \mathcal{L}\{D^{n-1} f(p)\} - D^{n-1} f(0) \\ &= p \Big(p^{n-1} \mathcal{L}(p) - \sum_{k=0}^{n-2} p^{n-k-2} D^k f(0)\Big) - D^{n-1} f(0) \\ &= p^n \mathcal{L}(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} D^k f(0).\end{aligned}$$

Démontrons le quatrième point :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f \star g\}(p) &= \int_{\mathbb{R}} \exp(-pt) \Big(\int_{\mathbb{R}} f(t-u)\, g(u)\, du\Big)\, dt \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-pt)\, f(t-u)\, g(u)\, dudt.\end{aligned}$$

Posons $v = t + u$, $t = v - u$, $dt = dv - du$, $dudt = dudv$ puisque $dudu = 0$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f \star g\}(p) &= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-p(u+v))\, f(v)\, g(u)\, dudt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \exp(-pv)\, f(v)\, dv \int_{\mathbb{R}} \exp(-pu)\, g(u)\, du \\ &= \mathcal{L}\{f\}(p)\, \mathcal{L}\{g\}(p).\end{aligned}$$

Les deux premières relations sont utilisées pour intégrer les équations différentielles linéaires à coefficients constants. La transformation de Laplace appliquée à une telle équation :

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_0 y = f$$

donne :

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_0)\,\mathcal{L}\{y\} - c = \mathcal{L}\{f\}$$

où c est une combinaison linéaire des dérivées de y en 0, données par les conditions initiales, d'où :

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{\mathcal{L}\{f\} + c}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_0}$$

et y est donnée par la transformation réciproque. En fait, on décompose en éléments simples, figurant sur les tables, ce qui permet de revenir à y par lecture de ces tables de droite à gauche.

Les racines du **polynôme caractéristique** :

$$P(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0$$

sont réelles ou complxes conjuguées. La transformée de la fonction $\exp(at)$ étant égale à $\dfrac{1}{p-a}$, une racine réelle r donne $\exp(rt)$. Un couple de racines complexes conjuguées $\alpha_k \pm i\beta_k$ donne :

$$\begin{aligned}\exp((\alpha_k + i\beta_k)t) + \exp((\alpha_k - i\beta_k)t) &= \exp(\alpha_k t)\big(\exp(i\beta_k t) + \exp(-i\beta_k t)\big)\\ &= 2\exp(\alpha_k t)\,\cos(\beta_k t).\end{aligned}$$

Remarque : si la partie réelle d'une racine, r ou α_k, est négative, l'exponentielle correspondante tend vers 0 quand t tend vers l'infini, si elle est nulle, l'exponentielle est constante ou périodiques, et si elle est positive, l'exponentielle tend vers l'infini. Cette remarque est utile pour étudier la stabilité des filtres (dans les transmissions).

Exemple. L'équation $y'' + ay' + by = f$ est transformée en :

$$(p^2 + ap + b)Y - (p+a)f(0) - f'(0) = F$$

d'où :

$$Y = \frac{F + (p+a)f(0) + f'(0)}{p^2 + ap + b}$$

Y et F étant les transformées de y et f.

Ainsi, l'équation différentielle :

$$y'' + 4y = \sin(t),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

est transformée en :

$$(p^2 + 4)\,Y = \frac{1}{p^2+1} + 1,$$

d'où :

$$\begin{aligned}Y &= \frac{1}{(p^2+1)(p^2+4)} + \frac{1}{p^2+1}\\ &= \frac{1/3}{p^2+1} + \frac{2/3}{p^2+4}\end{aligned}$$

et le résultat, lu dans les tables : $y = \frac{1}{3}\big(\sin(t) + \sin(2t)\big)$.

Pour l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

la transformation de Laplace donne :

$$Y = \frac{1}{p^2 + 2p + 2} = \frac{i}{2}\,(\frac{1}{p+1+i} - \frac{1}{p+1-i}),$$

d'où :

$$y = \frac{i}{2}\,(\exp(-1-i)t) - (\exp(-1+i)t)$$

et $y = \exp(-t)\,\sin(t)$. ∇

La dérivée de $\exp(i\omega t)$ est $i\omega\,\exp(i\omega t)$; on a donc :

$$\mathcal{L}\{i\omega\,\exp(i\omega t)\} = i\omega\,\mathcal{L}\{\exp(i\omega t)\} = p\,\mathcal{L}\{\exp(i\omega t)\}$$

d'où l'on déduit que, dans le domaine trigonométrique, $p = i\,\omega$.

Si les limites de f existent, on a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{+\infty} p\,\mathcal{L}\{f\}(p) = \lim\limits_{0} f(t), \\ \lim\limits_{0} p\,\mathcal{L}\{f\}(p) = \lim\limits_{+\infty} f(t). \end{cases}$$

On a en effet $p\,\mathcal{L}(p) = \mathcal{L}\{f'\}(p) + f(0)$ et :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'\}(p) &= \int_{\mathbb{R}_+} f'(t)\,\exp(-pt)\,dt \\ &= \big[f(t)\,\exp(-pt)\big]_0^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{p}\,f'(t)\,\exp(-pt)\,dt \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } p \to +\infty, \\ f(+\infty) - f(0) & \text{si } p \to 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Les deux relations de translation suivantes découlent de la définition :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t-t_0)\}(p) &= \exp(-t_0 p)\,\mathcal{L}\{f\}(p), \\ \mathcal{L}\{f\}(p+p_0) &= \mathcal{L}\{\exp(-p_0 t) f(t)\}(p). \end{aligned}$$

8.2 Transformée de Laplace des distributions

Notons $\mathcal{D}'_{+0}$ l'espace vectoriel des distributions à support dans $\mathbb{R}_+$. Il est évidemment stable par convolution.

la **transformée de Laplace** d'une distribution $T \in \mathcal{D}'_{+0}$ est la fonction C^∞ :

$$\mathcal{L}\{T\} \,:\, z \mapsto < T, \exp(-zt) >,$$

d'où :

$$\mathcal{L}\{T'\} \,:\, z \mapsto \, - < T, -z\exp(-zt) > = z\,\mathcal{L}\{T\}.$$

Ainsi, $\mathcal{L}\{\delta\} = 1$ et, par récurrence $\mathcal{L}\{\delta^{(n)}\} = z^n$.

Si la distribution est régulière, c'est-à-dire si $T = \widetilde{f}$, $f \in \mathcal{L}^1_{loc}$, les définitions coïcident : $\mathcal{L}\{\widetilde{f}\} = \mathcal{L}\{f\}$.

Une fonction $f \in C^\infty$ est la transformée de Laplace d'une distribution si $|f(x+iy)|\exp(-xt) \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

La propriété suivante est très importante :

$$\boxed{\forall T \in \mathcal{D}'_{+0}, \forall \Theta \in \mathcal{D}'_{+0} \,:\, \mathcal{L}\{T \star \Theta\} = \mathcal{L}\{T\}\,\mathcal{L}\{\Theta\} = \mathcal{L}\{\Theta \star T\}}$$

En effet $T \star \Theta \in \mathcal{D}'_{+0}$ et :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{T \star \Theta)\} &= < T(z), < \Theta(s), \exp(-(z+s)t > > \\
&= < T(z), \mathcal{L}\Theta \, \exp(-(z+s)t > \\
&= \mathcal{L}\Theta \, < T(z), \exp(-zt) > \\
&= \mathcal{L}\{\Theta\}\,\mathcal{L}\{T\} \\
&= \mathcal{L}\{T\}\,\mathcal{L}\{\Theta\} \\
&= \mathcal{L}\{\Theta \star T\}.
\end{aligned}$$

8.3 Inverse de convolution, méthode de Green

Soit $\Theta = U \star T$ une équation dans laquelle T est un opérateur différentiel linéaire non nul et U une distribution inconnue, et nous supposons l'existence des transformées de Laplace. S'il existe une distribution notée T^{*-1} telle que $T \star T^{*-1} = \delta$, élément neutre de la convolution, T^{*-1} est l'**inverse de convolution** de T, sa **solution fondamentale** ou sa **fonction de Green**. Si T est à coefficients constants, l'inverse existe (théorème de Malgrange[9]-Ehrenpreis[10]). L'équation est dans ce cas équivalente à $U = \Theta \star T^{*-1} = T^{*-1} \star \Theta$.

La transformée de Laplace de l'équation $\Theta = U \star T$ est :

$$\mathcal{L}\{\Theta\} = \mathcal{L}\{U\}\mathcal{L}\{T\},$$

9. Bernard Malgrange (né en 1928), mathématicien français.
10. Leon Ehrenpreis (1930-2010), mathématicien américain.

d'où :

$$\mathcal{L}\{U\} = \frac{\mathcal{L}\{\Theta\}}{\mathcal{L}\{T\}}.$$

On obtient U par transformation inverse, ce qui n'est pas forcément aisé.

Voyons un exemple très simple, le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} Y(t) = \mathrm{H}(t)y(t), \\ y' + ay = 0, \\ Y(0) = Y_0 = y_0. \end{cases}$$

Comme $Y'(t) = \mathrm{H}(t)y'(t) + y_0\delta$, puisque $y(t)\delta = y_0\delta$, le problème s'écrit :

$$Y' + aY = \mathrm{H}\,(y' + ay) + y_0\,\delta = y_0\,\delta$$

ou encore :

$$(\delta' + a\delta) \star Y = y_0\,\delta.$$

On a donc, si $\mathcal{L}\{Y\}$ existe :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{Y\} &= \frac{\mathcal{L}\{y_0\delta\}}{\mathcal{L}\{\delta' + a\delta\}} \\ &= \frac{y_0}{p+a} \\ &= y_0\mathcal{L}\{\mathrm{H}(t)\exp(-at)\} \end{aligned}$$

et $Y = y_0\mathrm{H}(t)\exp(-at)$. L'inverse de convolution de $\delta' + a\delta$, dans $\mathcal{D}'_{0+}$, est en effet égal à $\mathrm{H}(t)\exp(-at)$, car :

$$\begin{aligned} (\delta' + a\delta) \star \mathrm{H}(t)\exp(-at) &= (\mathrm{H}(t)\exp(-at))' + a\mathrm{H}(t)\exp(-at) \\ &= \delta\exp(-at) - a\mathrm{H}(t)\exp(-at) + a\mathrm{H}(t)\exp(-at) \\ &= \delta. \end{aligned}$$

Donnons quelques inverses de convolution utilisés dans la résolution d'équations différentielles et surtout d'équations aux dérivées partielles.

8.3.1 Oscillateur harmonique

Voyons le cas de l'**oscillateur harmonique** d'équation :

$$X'' + 2aX' + \omega^2 X = f,$$

$a \leq \omega$ étant un coefficient d'amortissement. Cette équation s'écrit :

$$(\delta'' + 2a\delta' + \omega^2\delta) \star X = f$$

et sa transformée de Laplace est :

$$(p^2 + 2ap + \omega^2)\,\mathcal{L}\{X\} = \mathcal{L}\{f\}$$

d'où :
$$\mathcal{L}\{X\} = \mathcal{L}\{f\}\,\frac{1}{p^2+2ap+\omega^2}.$$
En posant $a^2-\omega^2=-b^2$, on a :
$$\frac{1}{p^2+2ap+\omega^2} = \frac{1}{2b}\,(\frac{i}{p+a+ib}-\frac{i}{p+a-ib})$$
et :
$$\mathcal{L}\{X\} = \frac{1}{2b}\,\mathcal{L}\{f\}\,(\frac{i}{p+a+ib}-\frac{i}{p+a-ib})$$
Comme :
$$\mathcal{L}\{\mathrm{H}(t)\,\exp(-\alpha t) = \frac{1}{p+\alpha}$$
on obtient la solution particulière :
$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{i}{2b}\,\mathrm{H}(t)\,\exp(-at)\,(\exp(-ibt)-\exp(ibt))\star f(t) \\ &= \mathrm{H}(t)\,\exp(-at)\,\frac{\sin(bt)}{2b}\star f(t). \end{aligned}$$

La solution générale de l'équation homogène ($f=0$) est :
$$\begin{aligned} X(t) &= \mathcal{L}^{-1}\,(\frac{(p+a)X(0)+X'(0)}{p^2+ap+\omega^2}) \\ &= \exp(-at)\,(A\sin(bt)+B\cos(bt)) \end{aligned}$$
avec $b=\sqrt{\omega^2-a^2}$, $A=\dfrac{X'(0)-aX(0)}{b}$, $B=X(0)$.

8.3.2 Equation de la chaleur

Considérons une tige métallique illimitée, de coefficient de diffusibilité a, dont la température au temps t au point d'abscisse x est $\Theta(x,t)$; la condition initiale est $\Theta(x,0)$; $W(x,t)$ désigne un apport extérieur de chaleur au temps t au point d'abscisse x.

Sans apport extérieur, le flux calorique en un point d'abscisse x est proportionnel à la variation locale de température, $-\dfrac{\partial\Theta}{\partial x}$, le signe moins provenant du fait que les calories vont des particules plus chaudes vers les moins chaudes. La variation temporelle de température en un élément de la tige est proportionnelle à la différence entre le flux entrant et le flux sortant, donc à la dérivée en x du flux.

$\Theta(x,t)$ obéit donc à l'**équation de la chaleur** :
$$\frac{\partial}{\partial t}\Theta(x,t) - a\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Theta(x,t) = 0,$$

On a en posant $\Theta(x,t) = \mathrm{H}(t)F(x,t)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\Theta(x,t) - a\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Theta(x,t) &= F(x,t)\,\delta(t) + \mathrm{H}(t)(\frac{\partial}{\partial t}F(x,t) - a\frac{\partial^2}{\partial x^2}F(x,t)) \\
&= F(x,0)\,\delta(t).
\end{aligned}$$

Ceci peut s'écrire, en rajoutant la source extérieure de chaleur :

$$\Big(\delta'(t) - a\delta''(x)\Big) \star \Theta(x,t) = F(x,0)\,\delta(t) + \mathrm{H}(t)w(x,t)$$

d'où, le produit de convolution étant commutatif :

$$\Theta(x,t) = \Big(\delta'(t) - a\delta''(x)\Big)^{*-1} \star \big(F(x,0)\,\delta(t) + \mathrm{H}(t)w(x,t)\big).$$

Cherchons donc l'inverse de convolution Λ de $\delta'(t) - a\delta''(x)$:

$$\Big(\delta'(t) - a\delta''(x)\Big) \star \Lambda = \delta(x) \otimes \delta(t)$$

sous la forme $\mathrm{H}(t)f(x,t)$, c'est-à-dire :

$$f(x,0) \otimes \delta(t) + \mathrm{H}(t)\,\Big(\delta'(t) - a\delta''(x)\Big) \star f(x,t) = \delta(x) \otimes \delta(t).$$

nous devons donc trouver une fonction $f(x,t)$ telle que :

$$\begin{cases} f'_t - af''_{x^2} &= 0, \\ f(x,0) &= \delta(x). \end{cases}$$

La transformée de Fourier en x de $f(x,t)$ doit donc vérifier :

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}_x(f(x,t))(s) + as^2\mathcal{F}_x(f(x,t))(s) = 0.$$

La transformée de la gaussienne $\exp(-bx^2)$ étant la gaussienne $\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{b}}\,\exp(-\dfrac{s^2}{4b})$, nous sommes amènés à poser :

$$\mathcal{F}_x\{f(x,t)\}(s) = \lambda\exp(-ats^2)$$

puisque :

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}_x\{\Lambda(x,t)\}(s) = -as^2\mathcal{F}_x\{\Lambda(x,t)\}(s),$$

d'où $f(x,t)$ par la transformation inverse $\dfrac{1}{2\pi}\mathcal{F}_x$, la fonction étant paire (5.6). On obtient :

$$f(x,t) = \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi at}}\,\exp(-\frac{x^2}{4at}), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Il reste à voir si $\lim\limits_{t\to 0} f(x,0) = \delta(x)$. Pour $x > 0$, $f(x,0) = 0$, l'exponentielle l'emportant sur la fraction rationnelle, et $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = +\infty$. On obtient bien une suite de Dirac en x pour $\lambda = 1$ puisque, quelque soit $t > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(x,t)dx = \lambda.$$

On a donc finalement :

$$\Theta(x,t) = \Big(F(x,0)\,\delta(t) + \mathrm{H}(t)w(x,t)\Big) \star \mathrm{H}(t)\frac{\exp(-\frac{x^2}{4at})}{2\sqrt{a\pi t}}.$$

Si $F(x,0) = F_0$ et $w = 0$, on vérifie que $\Theta(x,t) = F_0$ pour $t > 0$:

$$\Theta(x,t) = \frac{F_0}{2\sqrt{a\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{(x-s)^2}{4at})\,ds,$$

d'où, en posant $u = \dfrac{(x-s)}{\sqrt{4at}}$, $ds = -\sqrt{4at}\,du$:

$$\Theta(x,t) = \frac{F_0}{2\sqrt{a\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{4at}\exp(-u^2)du = F_0 \quad (\text{car } \int_{\mathbb{R}} \exp(-u^2)du = \sqrt{\pi}\,).$$

Voyons quelques applications, avec $a = 0,25$.

(1) Supposons que $F(x,0) = 200$ si $x \in [-1,1]$, $F(x,0) = 0$ si $x \notin [-1,1]$, et que $w = 0$. On a pour $t > 0$:

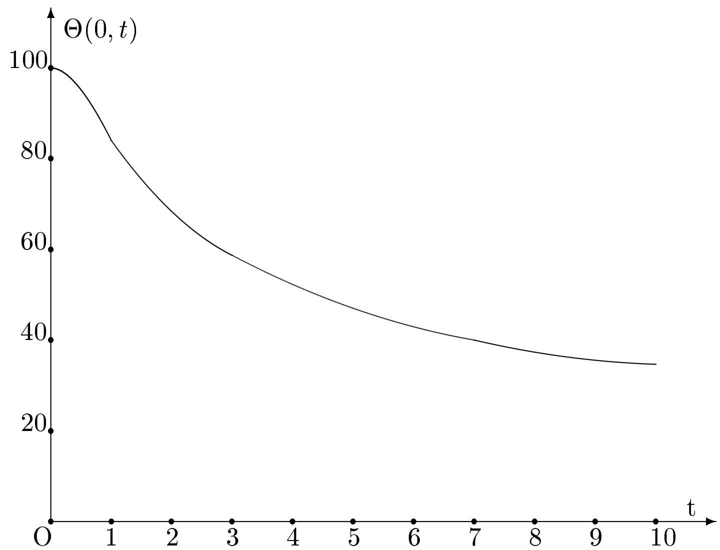
$$\begin{aligned}\Theta(x,t) &= \frac{100}{\sqrt{\pi t}} \int_{-1}^{1} \exp(-\frac{(x-s)^2}{t})\,ds \\ &= 50\,\big(\mathrm{erf}(\frac{x+1}{\sqrt{t}}) - \mathrm{erf}(\frac{x-1}{\sqrt{t}})\big),\end{aligned}$$

erf désignant la **fonction d'erreur** :

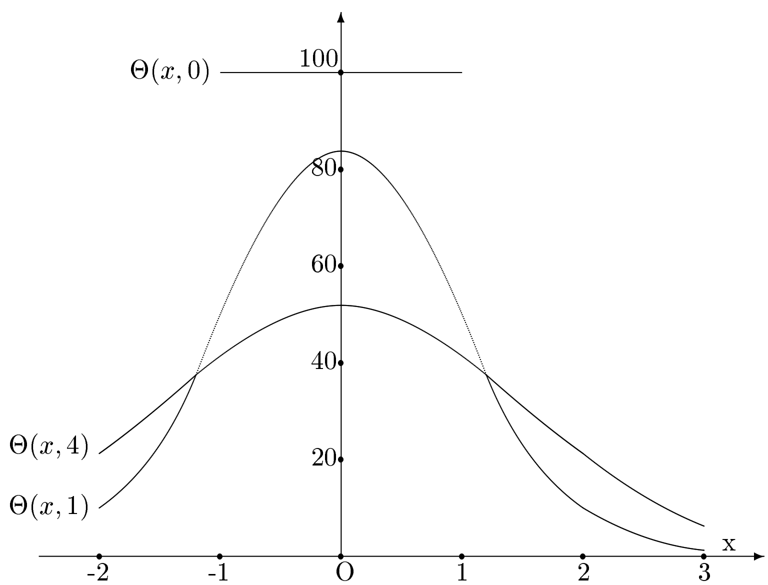
$$\begin{aligned}\mathrm{erf}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-x^2)\,dx \\ \int_a^b \exp(-x^2)\,dx &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\big(\mathrm{erf}(b) - \mathrm{erf}(a)\big)\end{aligned}$$

dont les valeurs sont données par une table. Cette fonction est impaire, et $\mathrm{erf}(+\infty) = 1$. Quand $t \to +\infty$, $\Theta(x,t)$ tend vers 0. Ainsi $\Theta(0,10^6) = 0,11$.

Etudions l'évolution de la température en $x = 0$: $\Theta(0,t) = 100\,\mathrm{erf}(\frac{1}{\sqrt{t}})$:



Voyons les courbes de température en $t = 0$, $t = 1$ et $t = 4$:



Comme il n'y a pas échange de chaleur en $x = 0$, en se restreignant à $x \geq 0$ on obtient le cas où la tige est la demi-droite $\mathbb{R}_+$.

(2) La tige étant illimitée, posons $W_n(x,t) = 100\,\mathrm{H}(t)\Pi_n(x)$, $\Pi_n(x) = n$ si $x \in [-1/n, 1/n]$, $\Pi_n(x) = 0$ sinon. Reprenons les calculs pour $t > 0$:

$$\begin{aligned}
\Theta(x,t) &= \frac{100\Pi_n(x)}{2\sqrt{\pi t}} \star \exp(-x^2/t) \\
&= \frac{50}{\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \Pi_n(s) \exp(\frac{-(x-s)^2}{t})\, ds \\
&= \frac{50}{\sqrt{\pi t}} \int_{x-1/n}^{x+1/n} n \exp(\frac{-u^2}{t})\, du.
\end{aligned}$$

On intégre entre $-1/n$ et $1/n$ une quantité équivalente à $n \exp(\frac{-x^2}{t})$ quand $n \to \infty$, et la limite est donc égale à $\frac{100}{\sqrt{\pi t}} \exp(\frac{-x^2}{t})$. Or Π_n est une suite de Dirac : sa limite quand $n \to \infty$ est $\delta(x)$. D'ailleurs :

$$\frac{100}{\sqrt{\pi t}} \delta(x) \star \exp(\frac{-x^2}{t}) = \frac{100}{\sqrt{\pi t}} \exp(\frac{-x^2}{t}).$$

On vérifie que la quantité de chaleur dans la tige au temps $t > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}} \Theta(x,t)\, dx = 100t$$

est égale à la quantité de chaleur distribuée.

(3) Etudions le cas où la tige est de longueur π, en s'inspirant de la méthode historique de Fourier.

Etendons $\Theta(x,t)$ à $\mathbb{R}$, en une fonction paire, continue, C^∞ par morceaux ($t > 0$, $x \neq k\pi$) et 2π-périodique en x :

$$\Theta(x,t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(t) \cos(nx).$$

Le fait que Θ soit paire annule le flux de chaleur en $x = 0$, et en $x = \pi$, puisque $\Theta(\pi_-, t) = \Theta(-\pi_+, t) = \Theta(\pi_+, t$. Comme :

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial \Theta}{\partial t} &= \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n'(t) \cos(nx) \\
\dfrac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &= -\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(t) n^2 \cos(nx)
\end{cases}$$

on doit avoir :

$$f_n'(t) = -0,25\, n^2 f_n(t),$$

d'où $f_n(t) = \lambda_n \exp(-0,25\, n^2 t)$, et :

$$\Theta(x,t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \cos(nx)\, \exp(-0,25\, n^2 t).$$

Quand $t \to 0$, $\Theta(x,t)$ tend vers $\Theta(x,0) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \cos nx$, de sorte que les λ_n sont les coefficients de Fourier de $\Theta(x,0)$:

$$\begin{cases} \lambda_0 & = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \Theta(x,0)\, dx, \\ \lambda_n & = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \Theta(x,0) \cos nx\, dx. \end{cases}$$

Quand $t \to \infty$, $\exp(-0,25\, n^2 t) \to 0$, et et $\Theta(x,t) \to \lambda_0$: la chaleur tend à être uniformément répartie sur la tige.

Supposons que $\Theta(x,0) = 100$ si $x \in [0, \pi/10]$ et $\Theta(x,0) = 0$ si $x > \pi/10$. On a dans ce cas :

$$\begin{cases} \lambda_0 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi/10} \Theta(x,0)\, dx = 10, \\ \lambda_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi/10} \Theta(x,0)\, \cos nx\, dx = \dfrac{200}{n\pi} \sin(n\pi/10). \end{cases}$$

Si n va de 0 à 100, on obtient l'approximation :

$$\Theta(x,t) = 10 + \frac{200}{\pi} \sum_{1}^{100} \frac{1}{n} \sin(n\pi/10) \cos nx\, \exp(-0.25\, n^2 t).$$

Pour $t = 0$, cette expression donne pour $x \in [0, \pi/10[$ des valeurs proches de 100 : $97,99$ en 0, 109 en $\pi/11$, $49,51$ en $\pi/10$, $-7,94$ en $\pi/9$, puis des valeurs inférieures à 1.

On obtient ensuite, après $2s$ et $10s$ et aux abscisses $k\pi/5$, de $k = 0$ à $k = 10$:

$23,66$	$20,37$	$11,49$	$4,42$	$1,18$	$0,41$
$11,61$	$11,31$	$10,50$	$9,50$	$8,69$	$8,39$

9 Compléments

9.1 Caractérisation des distributions singulières

Remarquons d'abord que δ, d'ordre 0, est la dérivée d'ordre 2 de la fonction continue sur $\mathbb{R}$ $X\mathrm{H} : x \mapsto \max(0,x)$, que $\widetilde{\mathrm{H}}$, d'ordre 0, est la dérivée première de la même fonction. Nous allons démontrer la caractérisation suivante :

Soient K un compact de $\mathbb{R}^N$, $T \in \mathcal{D}'$ d'ordre p_K sur K, et :

$$\mathcal{D}(K) = \{\phi \in \mathcal{D} \,|\, \mathrm{Supp}(\phi) \subset K\}.$$

Il existe alors une fonction continue f sur $\mathbb{R}^N$ telle que $T_{|K} = \widetilde{f}^{(p_K+2)}$.

Il existe une constante $C_K \in \mathbb{R}_+$ (cf. 3.4) telle que, pour toute $\phi \in \mathcal{D}(K)$:

$$< T, \phi > \leq C_K ||\phi^{(p_k)}||_\infty.$$

On a une application linéaire :

$$\phi^{(i)}(x) = \int_{-\infty}^x \phi^{(i+1)}(t)\,dt = u_i(\phi^{(i+1)})(x)$$

d'où, si $v = u_0 \circ \cdots \circ u_{p_K}$:

$$\phi(x) = v(\phi^{(p_k+1)})(x).$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} ||\phi^{(p_k)}||_\infty &\leq \sup_x |\int_{-\infty}^x \phi^{(p_k+1)}(t)\,dt| \\ &\leq \sup_x \int_{-\infty}^x |\phi^{(p_k+1)}(t)|\,dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |\phi^{(p_k+1)}(t)|\,dt \\ &\leq ||\phi^{(p_k+1)}||_1, \end{aligned}$$

d'où :

$$< T, \phi > = < T \circ v, \phi^{(p_k+1)} >$$

et $T \circ v$ est une forme linéaire continue pour la norme $||\ ||_1$ sur le sous-espace de $L_1(K)$ formé des dérivées d'ordre $p_k + 1$ des fonctions de $\mathcal{D}(K)$. Elle se prolonge en une forme linéaire continue (pour la norme $||\ ||_1$) sur $L_1(K)$ (théorème de Hahn-Banach).

Il existe une isométrie linéaire surjective de l'espace des fonctions mesurables bornées sur K, $L_\infty(K)$, sur l'espace des formes linéaires continues sur $L_1(K)$:

$$\begin{array}{rcl} L_\infty(K) & \to & L_1^*(K) \\ g & \mapsto & l_g : f \mapsto \displaystyle\int f(t)g(t)\,dt \end{array}$$

de sorte qu'il existe une fonction g mesurable et bornée sur K, que l'on peut prolonger à $\mathbb{R}^N$ par 0 hors de K, telle que :

$$< T, \phi > = < \widetilde{g}, \phi^{(p_k+1)} > = (-1)^{p_K+1} < \widetilde{g}^{(p_k+1)}, \phi > .$$

Si on pose :

$$f(x) = \int_{-\infty}^x g(t)\,dt,$$

f est continue sur $\mathbb{R}^N$ et $\widetilde{f}^{(p_K+2)} = \widetilde{g}^{(p_k+1)} = T$.

9.2 Formule sommatoire de Poisson

Si $\phi \in \mathcal{S}$ et si P est le peigne de Dirac de période 1 :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\phi}(n)$$

$$< \mathrm{P}, \phi > = < \mathrm{P}, \widehat{\phi} > = < \widehat{\mathrm{P}}, \phi >$$

Démontrons la première égalité.

La fonction ϕ étant à décroissance rapide, il en est de même de la fonction $\psi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(x+n)$, périodique de période 1. La convergence est normale et on peut écrire, les c_p désignant les coefficients de Fourier :

$$\begin{aligned} c_p(\psi) &= \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(x+n)\exp(-2i\pi px)\,dx \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 \phi(x+n)\exp(-2i\pi px)\,dx \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} \phi(x)\exp(-2i\pi px)\,dx \\ &= \widehat{\phi}(p). \end{aligned}$$

La série de Fourier de ϕ convergeant normalement vers ϕ (théorème de Dirichlet), on a pour tout x :

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}} c_p(\psi)\exp(2i\pi px) = \psi(x)$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}} \phi(x+p) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \widehat{\phi}(p)\exp(2i\pi px)$$

et pour $x = 0$:

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}} \phi(p) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \widehat{\phi}(p).$$

La démonstration est encore valable hors du cadre des distributions, lorsque ϕ est de classe C^2 et que, pour tout x, $|\phi(x)| < (1+|x|^a)^{-1}$, $a > 1$.

La seconde partie est une conséquence immédiate de la première :

$$\begin{cases} \sum \phi(n) = < \mathrm{P}, \phi >, \\ \sum \widehat{\phi}(n) = < \mathrm{P}, \widehat{\phi} > = < \widehat{\mathrm{P}}, \phi > . \end{cases}$$

Le peigne de période 1 est donc invariant par la transformée de Fourier, et pour $\theta > 0$:

$$\widehat{\mathrm{P}_\theta} = \theta^{-1}\mathrm{P}_{\theta^{-1}}.$$

On peut aussi remarquer directement que, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\widehat{\delta_n} = \exp(-inst) = \delta_n$.

9.3 Egalités de Parseval et de Plancherel

Dans l'espace de Hilbert H de base hilbertienne $(e_n(x) = \exp(2i\pi nx))_{n\in\mathbb{Z}}$, on a :

$$f = \sum_{\mathbb{Z}} c_n(f) e_n, \quad c_n(f) = < e_n, f >$$

d'où l'identité de Parseval :

$$\int_0^1 |f(t)|^2 \, dt = \int_0^1 |c_n(f)|^2 \, dt = \sum |c_n(f)|^2$$

l'identité de Plancherel :

$$||f||_2^2 = ||\widehat{f}||_2^2$$

9.4 Exemples de distributions sur $\mathbb{R}^2$

Nous avons en théorie travaillé dans $\mathbb{R}^N$, mais les exemples étaient en dimension 1. Donnons-en quelques-uns en dimension 2.

Si $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$, on a la distribution régulière $\widetilde{f}$.

Pour obtenir une distribution à support compact, on peut faire le produit tensoriel de deux distributionsà support compact sur $\mathbb{R}$:

$$< \delta(x,y), \phi(x,y) > = < \delta(x) \otimes \delta(y), \phi(x,y) > = \phi(0,0),$$

ou encore :

$$< \mathrm{H}(x,y), \phi(x,y) > = < \mathrm{H}(x) \otimes \mathrm{H}(y), \phi(x,y) > = \iint_{\mathbb{R}^2_+} \phi(x,y) \, dxdy.$$

On peut également utiliser la fonction caractéristique (χ) d'une sous-variété compacte de $\mathbb{R}^2$; si par exemple B est la boule de rayon 1 centrée en $(0,0)$, de bord C :

$$\begin{aligned} < \chi_B, \phi(x,y) > &= \iint_B \phi(x,y) \, dxdy, \\ < \chi_C, \phi(x,y) > &= \int_0^{2\pi} \phi(\cos\theta, \sin\theta) \, d\theta. \end{aligned}$$

Si f est une fonction mesurable à support compact, $\widetilde{f}$ est une distribution à support compact.

Cherchons l'inverse de convolution de l'opérateur de Laplace, ou **laplacien**, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, sous la forme $\Theta = c \ln(x^2 + y^2)$:

$$\Delta \star \ln(x^2 + y^2) = \delta(x,y).$$

Comme $(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}) \ln(x^2 + y^2) = 0$ pour $(x,y) \neq (0,0)$, le support de la distribution est $\{(0,0)\}$. approchons cette distribution par la distribution :

$$\Theta_a = c \ln(x^2 + y^2 + a^2).$$

On a :

$$\Delta\delta(x,y) \star \Theta_a = \delta(x,y) \star \Delta\Theta_a = \frac{4a^2c}{(x^2+y^2+a^2)^2}$$

et :

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} \Delta\Theta_a(x,y)\, dxdy = 4a^2c \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(x^2+y^2+a^2)^2},$$

soit en coordonnées polaires :

$$I = 8\pi a^2 c \int_0^{+\infty} \frac{\rho d\rho}{(\rho^2+a^2)^2}$$

puis en posant $\rho^2 = v$:

$$4\pi a^2 c \int_0^{+\infty} \frac{dv}{(v+a^2)^2} = 4\pi a^2 c \Big[\frac{-1}{v+a^2}\Big]_0^{+\infty},$$

d'où $I = 4\pi c$. On prend donc $c = \dfrac{1}{4\pi}$, et l'inverse de convolution cherché est :

$$\Delta^{*-1} = \frac{1}{4\pi} \ln(x^2+y^2).$$

La solution générale de l'équation $\Delta\phi = \psi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ est donc :

$$\theta(x,y) = \frac{1}{4\pi} \ln(x^2+y^2) \star \psi(x,y) + h(x,y)$$

où h est une fonction harmonique ($\Delta h = 0$) de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

10 Exercices

10.1 (A) Sur les distributions

(1) Calculer les dérivées successives de $\widetilde{|x|}$.

(2) Existe-t-il des distributions telles que $\mathrm{Supp}(T) = \{0\}$ et $< T, \phi > \neq 0$ bien que $\phi(0) = 0$?

(3) Comparer $\mathrm{D}\widetilde{\mathrm{H}}$ (dérivée au sens des distributions) et $\widetilde{\mathrm{DH}}$ (dérivée au sens des fonctions).

(4) Caractériser les $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vérifiant :
(a) $xT(x) = 0$,
(b) $xT(x) = \widetilde{1}$.

(5) Montrer que $T' = 0$ équivaut à $T = \lambda\widetilde{1}$.

(6) Evaluer $X\delta'$.

(7) Résoudre les équations :
(a) $fT' = 0$,
(b) $XT' = \delta$,
(c) $XT' = T$.

(8) Evaluer $X\,\mathrm{pf}(\dfrac{1}{X^2})$. Résoudre $XT' = -T$.

(9) Construire la distribution $\mathrm{pf}(\dfrac{1}{X^n})$, **partie finie de** $1/X^n$ et calculer sa dérivée.

(10) calculer $X\mathrm{pf}(\dfrac{1}{X^n})$.

(11) Les distributions $\mathrm{vp}(\dfrac{1}{X})$, $\mathrm{pf}(\dfrac{1}{X^n})$, $\widetilde{f}$ pour $f(x) = \ln|x|$, $f(x) = x^n$, $f(x) = \exp(x)$, sont-elles homogènes ? si oui, de quel ordre ?

(12) Donner les degrés des distributions homogènes de support $\{0\}$.

(13) Montrer que $\delta(x_1, \ldots, x_n)$ est homogène de degré $-n$.

10.2 (B) Sur la convolution

(1) Peut-on définir $\mathrm{H}(x)\star\mathrm{H}(x)$? $\mathrm{H}(x)\star\mathrm{H}(-x)$? $\mathrm{H}(x)\exp(-|x|)$?

(2) Si f est la fonction caractéristique de $[0,1]$, évaluer $\delta' \star \widetilde{f}$.

(3) Calculer $\delta' \star \delta'$, $\delta' \star \widetilde{\sin}$, $\delta'' \star \widetilde{\mathrm{H}}$.

(4) Peut-on écrire $\delta \star \widetilde{X} = \widetilde{\mathrm{H}} \star \widetilde{1}$?

10.3 (C) Sur la transformation de Fourier

(1) Calculer $\mathcal{F}(\widetilde{f})$ pour $f(x) = \exp(iax)$, $f(x) = \cos(ax)$, $f(x) = \sin(ax)$.

(2) Calculer les transformées de Fourier de (a) $\widetilde{\ln^*}$, (b) $\widetilde{Xf}$, (c) $\widetilde{X^n}$.

(3) Calculer la transformée de Fourier de $f(x) = \exp(-a|x|)$, $a > 0$.

(4) Calculer la transformée de Fourier de $f(x, y) = \exp(-\pi(a^2x^2 + b^2y^2))$.

10.4 (D) Sur les distributions tempérées

(1) Si $T \in \mathcal{S}'$, est-ce que $T' \in \mathcal{S}'$?

(2) La distribution $\mathrm{vp}(\dfrac{1}{X})$ est-elle tempérée ?

(3) Les distributions $\widetilde{f}$ avec :
(a) $f(x) = \cos(\exp(x))$,
(b) $f(x) = \exp(x)\cos(\exp(x))$,
(c) $f(x) = x^n \exp(x)\cos(\exp(x))$,
(d) $f(x) = \mathrm{H}(x) x \exp(x)$.
sont-elles tempérées ?

(4) La distribution $T : < T, \phi > = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(nx_0)$ est-elle tempérée ?

10.5 (E) Sur la transformation de Laplace

(1) Calculer les transformées de Laplace de H, de δ', δ'', $\exp(-at)$, $\sin t$, $\cos t$, sh$t$ et ch$t$

(2) Calculer les inverses de convolution de $\mathrm{H}(x)\exp(x)$, de $\mathrm{H}(x)\exp(ix)$, de $\mathrm{H}(x)\sin x$, de $\mathrm{H}(x)\cos x$.

(3) Calculer l'inverse de convolution de $\delta'' - 2a\delta' + b\delta$.

(4) Résoudre l'équation $T'' - T = \delta'$, $T \in \mathcal{D}'$

10.6 (F) Sur les distributions dans $\mathbb{R}^2$

(1) Donner l'ordre et le support de la distribution $< T, \phi > = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \phi(x, x^2)\, dx$. Existe-t-il une fonction f continue telle que $\widetilde{f} = T$?

(2) Si $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $\widetilde{f}$ est-elle une distribution ?

(3) Calculer l'inverse de convolution de l'opérateur différentiel $A = \dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}$.

(4) Montrer que, si $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$, $\widetilde{f}$ est une distribution tempérée. Calculer la distribution $\Delta(f)$, Δ étant le laplacien.

11 Correction

(λ et μ désignent des scalaires quelconques.)

(A.1) La dérivée de $\widetilde{|x|}$ est la distribution signe $\widetilde{\mathrm{S}}$. Celle de $\widetilde{\mathrm{S}}$ est 2δ...

(A.2) Si ϕ est une fonction-plateau valant 1 dans un voisinage de 0, et si $\psi(x) = x\phi(x)$, ψ s'annule en 0, et $< \delta', \psi > = \psi'(0) = 1$.

(A.3) La dérivée de la fonction H est la fonction nulle de $\mathcal{L}^1_{loc}$, et donc $\mathrm{H}' = 0$, alors que la dérivée de la distribution $\widetilde{\mathrm{H}}$, $\widetilde{\mathrm{H}}'$, est δ.

(A.4) (a) $xT(x) = 0$, $T \neq 0$. Si $E = \{\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mid \phi(0) = 0\}$, la multiplication par x, X, est un isomorphisme de E, puisque $X\phi$ et $X^{-1}\phi$ appartiennent à E, et :

$$< XT, \phi > = < T, X\phi > = 0$$

montre que T s'annule sur E, de sorte que son support est $\{0\}$ et qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ et des scalaires $\lambda_i \neq 0$ tels que :

$$T = \sum_{0 \leq i \leq m} \lambda_i \delta^{(i)}.$$

Les fonctions $\phi_n(x) = x^n\phi(x)$ sont telles que $\phi^{(i)}(x) = 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $\phi^{(n)}(0) = n!\,\phi(0)$. On a donc pour toute $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$0 = < T, \phi_m > = \lambda_m\, m!\, \phi(0),$$

et donc $\lambda_m = 0$. On recommence avec $m-1$... jusqu'à 1, et il reste $T = \lambda_0 \delta$.

(b) $XT = \widetilde{1}$. On connaît la solution $T = \mathrm{vp}(\dfrac{1}{X})$. On a donc $X(T - \mathrm{vp}(\dfrac{1}{X})) = 0$, et $T = \mathrm{vp}(\dfrac{1}{X}) + \lambda\,\delta$.

(A.5) Si $T' = 0$, $\mathcal{F}(T') = 0$, or $\mathcal{F}(T') = 2i\pi\, s\mathcal{F}(T)$, d'où $\mathcal{F}(T) = \lambda\delta$ et $T = \lambda\widetilde{1}$.

(A.6) Evaluer $X\delta'$. De :

$$< X\delta', \phi > = - < \delta, (X\phi)' > = - < \delta, X\phi' + \phi > = -\phi(0)$$

on déduit que $X\delta' = -\delta$.

(A.7) (a) $fT' = 0$, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. On a :

$$< fT', \phi > = < T', f\phi > = < T, f\phi' + f'\phi > = 0,$$

ce qui équivaut à la condition : les intérieurs des supports de T et de f sont disjoints. Ils peuvent se toucher, car en un point commun f a toutes ses dérivées nulles.

(b) $XT' = \delta$. On a la solution $T = \delta$, d'où $X(T-\delta)' = 0$, $(T-\delta)' = \lambda\delta$, $T - \delta = \lambda\widetilde{\mathrm{H}} + \mu\widetilde{1}$, et $T = \delta + \lambda\widetilde{\mathrm{H}} + \mu\widetilde{1}$.

(c) $XT' = T$. Toutes les solutions sont de la forme $T = \lambda\delta$.

(A.8) Si $T = X\mathrm{pf}(\frac{1}{X^2})$, on a :

$$\begin{aligned}
< T, \phi > &= < \mathrm{pf}(\frac{1}{X^2}), X\phi > \\
&= \lim_{\epsilon\to 0+} \int_{x\geq\epsilon} \frac{\phi(x)}{x}\, dx \\
&= < \mathrm{vp}\frac{1}{X}, \phi >
\end{aligned}$$

et donc $T = \mathrm{vp}(\frac{1}{X})$.

Les solutions de $XT' = -T$ sont $T = \lambda\mathrm{vp}(\frac{1}{X})$.

(A.9) Considérons, pour $\epsilon > 0$, l'intégrale $\int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\phi(x)}{x^n}\, dx$. Elle converge, mais que se passe-t-il quand $\epsilon \to 0+$?

Il existe $\epsilon_0 > 0$ et une fonction $\psi \in C^\infty([0, \epsilon_0])$ telle que, pour $x \in [0, \epsilon_0]$, on ait :

$$\phi(x) = \phi(0) + x\phi'(0) + \frac{x^2}{2!}\,\phi''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\,\phi^{(n-1)}(0) + x^n\psi(x)$$

et, pour $0 < \epsilon < \epsilon_0$ et $I = [\epsilon, \epsilon_0]$:

$$\int_{|x|\in I} \frac{\phi(x)}{x^n}\, dx = \sum_{j=0}^{n-2} \int_{|x|\in I} \frac{\phi^{(j)}(0)}{j!\, x^{n-j}}\, dx + \int_{|x|\in I} \psi(x)\, dx$$

Cherchons la partie divergente, $\mathrm{div}_n(\phi)$, de cette intégrale quand $\epsilon \to 0+$. L'intégrale des fonctions impaires est nulle. On obtient :

$$\begin{cases}
\mathrm{div}_{2n}(\phi) & = 2\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\phi^{(2j)}(0)}{(2n-1-2j)\,(2j)!\,\epsilon^{2n-1-2j}} \\
\mathrm{div}_{2n+1}(\phi) & = 2\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\phi^{(2j+1)}(0)}{(2n-1-2j)\,(2j+1)!\,\epsilon^{2n-1-2j}},
\end{cases}$$

et dans tous les cas :

$$< \mathrm{pf}(\frac{1}{X^n}), \phi > = \lim_{\epsilon\to 0+} \Big(\int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\phi(x)}{x^n}\, dx - \mathrm{div}_n(\phi) \Big)$$

avec :

$$\mathrm{div}_n(\phi) = 2 \sum_{\substack{j<n-1 \\ j\equiv n \bmod 2}} \frac{\phi^{(j)}(0)}{(n-1-j)\, j!\, \epsilon^{n-1-j}}.$$

Calculons la dérivée de $\mathrm{pf}(\frac{1}{X^{2n}}) = T_{2n}$:

$$\begin{aligned} < T'_{2n}, \phi > &= - < T_{2n}, \phi' > \\ &= - \lim_{\epsilon\to 0+} \Big(\int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\phi'(x)}{x^{2n}}\, dx - \mathrm{div}_{2n}(\phi') \Big), \end{aligned}$$

or :

$$\int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\phi'(x)}{x^{2n}}\, dx = \Big[\frac{\phi(x)}{x^{2n}}\Big]_{\epsilon}^{-\epsilon} + 2n \int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\phi(x)}{x^{2n+1}}\, dx$$

et :

$$\frac{\phi(-\epsilon)-\phi(\epsilon)}{\epsilon^{2n}} = -\frac{2}{\epsilon^{2n}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\phi^{(2j+1)}(0)}{(2j+1)!}\, \epsilon^{2j+1} + o(\epsilon).$$

On a donc :

$$\begin{aligned} < T'_{2n}, \phi > &= 2 \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\phi^{(2j+1)}(0)}{(2j+1)!\, \epsilon^{2n-2j-1}} + \frac{\phi^{(2j+1)}(0)}{(2j)!\,(2n-2j-1)\, \epsilon^{2n-2j-1}} \\ &\qquad -2n \int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\phi(x)}{x^{2n+1}}\, dx \\ &= 2n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\phi^{(2j+1)}(0)}{(2j+1)!\,(2n-2j-1)\, \epsilon 2n-2j-1} - 2n \int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\phi(x)}{x^{2n+1}}\, dx, \end{aligned}$$

d'où $T'_{2n} = -2nT_{2n+1}$.

Un calcul similaire montre que $T'_{2n-1} = -(2n-1)T_{2n}$.

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\mathrm{D}\ \mathrm{pf}(\frac{1}{X^n}) = -n\, \mathrm{pf}(\frac{1}{X^{n+1}})}$$

(A.10)

$$\begin{aligned}
< x\mathrm{pf}(\frac{1}{X^n}), \phi(x) > &= < \mathrm{pf}(\frac{1}{X^n}), X\phi > \\
&= \lim_{\epsilon\to 0+} \int_{|x|\geq\epsilon} \frac{x\phi(x)}{x^n}\, dx - div_n(x\phi(x)) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0+} \int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\phi(x)}{x^{n-1}}\, dx - 2 \sum_{\substack{j<n-1 \\ j\equiv n \bmod 2}} \frac{(x\phi(x))^{(j)}(0)}{(n-1-j)\, j!\, \epsilon^{n-1-j}} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0+} \int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\phi(x)}{x^{n-1}}\, dx - 2 \sum_{\substack{j<n-1 \\ j\equiv n \bmod 2}} \frac{\phi^{(j-1)}(0)}{(n-1-j)\, j!\, \epsilon^{n-1-j}} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0+} \int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\phi(x)}{x^{n-1}}\, dx - 2 \sum_{\substack{k<n-2 \\ j\equiv n-1 \bmod 2}} \frac{\phi^{(k)}(0)}{(n-1-(k+1))\, (k+1)!\, \epsilon^{n-1-j}} \\
&= < \mathrm{pf}(\frac{1}{X^{n-1}}), \phi(x) >
\end{aligned}$$

Finalement $x\mathrm{pf}(\frac{1}{X^n})$ =pf(($\frac{1}{X^{n-1}}$)).

(A.11) Rappelons que T est homogène de degré n si $xT'(x) = n\,T$;

$T = \mathrm{vp}(\frac{1}{X})$, $T' = -\mathrm{pf}(\frac{1}{X^2})$, $xT'(x) = -\mathrm{vp}(\frac{1}{X})$; T est homogène de degré -1 ;

$T = \mathrm{pf}(\frac{1}{X^n})$, $T' = -n\,\mathrm{pf}(\frac{1}{X^{n+1}})$, $XT' = -n\,\mathrm{pf}(\frac{1}{X^n})$, et T est homogène de degré $-n$;

$f = \ln|x|$, $\mathrm{D}\widetilde{f}$ =vp($\frac{1}{X}$), et $\widetilde{f}$ n'est pas homogène.

Il est immédiat que, si $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{f}$ est homogène de degré n, et si $f(x) = \exp(x)$, $\widetilde{f}$ n'est pas homogène.

(A.12) Si T est de support $\{0\}$, elle est égale à $\sum_k a_k\delta^{(k)}$, et sa dérivée à $\sum_k a_k\delta^{(k+1)}$. Si $T = \delta^k$, $XT' = X\delta^{(k+1)}$ et on a :

$$\begin{aligned}
< X\delta^{(k+1)}, \phi > &= \; < \delta^{(k+1)}, X\phi > \\
&= (-1)^{k+1} < \delta, (X\phi)^{(k+1)} > \\
&= (-1)^{k+1}\, \phi^{(k)}(0)
\end{aligned}$$

d'où $X\delta^{(k+1)} = (-1)^{k+1}\,\delta^{(k)}$, et $a_k\delta^{(k)}$ est homogène de degré $k+1$.

(A.13) Si $\delta = \delta(x_1, \ldots, x_n)$ et $x = (x_1, \ldots, x_n)$, on a :

$$
\begin{aligned}
< x_i \frac{\partial \delta}{\partial x_i}, \phi > &= < \frac{\partial \delta}{\partial x_i}, x_i \phi(x) > \\
&= - < \delta, \frac{\partial}{\partial x_i}(x_i \phi(x)) > \\
&= - < \delta, \phi(x) + x_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} > \\
&= - < \delta, \phi(x) >
\end{aligned}
$$

et, en sommant sur i, on obtient :

$$
\sum_i x_i \frac{\partial \delta}{\partial x_i} = -n\delta
$$

ce qui prouve que $\delta(x_1, \ldots, x_n)$ est homogène de degré $-n$.

(B.1) H n'appartient pas à L^1, mais :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H} \star \mathrm{H}(s) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{H}(x)\mathrm{H}(s-x)\, dx \quad (0 \leq x \leq s) \\
&= \sup(0, s) \\
&= s\mathrm{H},
\end{aligned}
$$

et H$\star$H=XH.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H} \star \mathrm{H}_-(s) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{H}(x)\mathrm{H}(x-s)\, dx \quad (\mathrm{H}_-(x) = \mathrm{H}(-x)) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{H}(x-s)\, dx \\
&= \int_s^{+\infty} dx \\
&= +\infty.
\end{aligned}
$$

Si $f(x) = \exp(-|x|)$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H} \star f(s) &= \int_{\mathbb{R}_+} \exp(-|x-s|)\, dx \\
&= \int_0^s \exp(x-s)\, dx + \int_s^{+\infty} \exp(s-x)\, dx \\
&= 2 - \exp(-s).
\end{aligned}
$$

Ceci montre que le critère portant sur les support des distributions (4.7.2), suffisant, n'est pas nécessaire.

(B.2) Si f est la fonction caractéristique de $[0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} < \widetilde{f} \star \delta', \phi > &= < \widetilde{f}(x), < \delta'(y), \phi(x+y) > > \\ &= < \widetilde{f}(x), < \delta(y), \phi'(x+y) > > \\ &= < \widetilde{f}(x), \phi'(x) > \\ &= \int_0^1 \phi'(x)\, dx > \\ &= \phi(1) - \phi(0) \end{aligned}$$

et donc $\widetilde{f} \star \delta' = \delta_1 - \delta_0$ $(= \widetilde{f}')$.

(B.3) On peut faire, comme pour B.2, le calcul direct, ou utiliser la relation $(T \star \Theta)' = T' \star \Theta = T \star \Theta'$ (4.7.2) :

$$\begin{array}{rcccl} \delta' \star \delta' &=& \delta \star \delta'' &=& \delta'', \\ \delta' \star \widetilde{\sin} &=& \delta \star \widetilde{\cos} &=& \widetilde{\cos}, \\ \delta'' \star \widetilde{H} &=& \delta' \star \delta &=& \delta'. \end{array}$$

(B.4) On a $\delta' \star \widetilde{X} = \widetilde{DX} = \widetilde{1}$, mais $\widetilde{H} \star \widetilde{X}$ n'étant pas défini, ni d'ailleurs $\widetilde{H} \star \widetilde{1}$, on ne peut utiliser la relation ci-dessus.

(C.1) $\mathcal{F}(\widetilde{f})$, $f = \exp(iax)$ (distribution tempérée).

Comme $\widehat{\delta_a} = \widetilde{\exp}(-iat)$ (6.3), on a (5.6) :

$$\delta_a = \mathcal{F}^{-1}(\widetilde{\exp}(-iat)) = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathcal{F}}(\widetilde{\exp}(-iat)) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(\widetilde{\exp}(iat))$$

et $\mathcal{F}(\widetilde{\exp}(iax)) = 2\pi\, \delta_a$.

On en déduit :

$$\mathcal{F}(\widetilde{\cos}(ax)) = \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{-a})$$

et :

$$\mathcal{F}(\widetilde{\sin}(ax)) = \frac{1}{2i}(\delta_a - \delta_{-a}).$$

(C.2)

(a) $\mathcal{F}(\widetilde{\ln^*})$.

Nous avons vu que la dérivée de $\widetilde{\ln^*}$ est $\mathrm{vp}(\dfrac{1}{X})$ (4.5). De (6.3) :

$$\begin{cases} \mathcal{F}(\mathrm{vp}(\dfrac{1}{X})) & = i\pi \widetilde{S} \\ \mathcal{F}(\widetilde{\ln^*}) & = is\, \mathcal{F}(\mathrm{vp}(\dfrac{1}{X})) \end{cases}$$

on déduit que $\mathcal{F}(\widetilde{\ln^*}) = -\pi s\, \widetilde{S}$.

(b) $\mathcal{F}(Xf)$.

De $\mathrm{D}\widehat{f} = -i\widehat{f_1}$, où $f_1(s) = sf(s)$ (5.2.1), on déduit que :

$$\mathcal{F}(Xf) = i\mathrm{D}\widehat{f}.$$

(c) $\mathcal{F}(\widetilde{X^n})$ (distribution tempérée).

On a vu que $\widehat{\widetilde{1}} = 2\pi\delta$ (6.3). Ensuite, d'après (b), on a $\widehat{\widetilde{X}} = 2i\pi\delta'$, puis, par récurrence, $\widehat{\widetilde{X^n}} = 2i^n\pi\delta^{(n)}$.

(C.3) ($\mathcal{F}(f)$, $f(x) = \exp(-a|x|)$, $a > 0$, $f \in L^1(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f) &= \int_{-\infty}^{0} \exp(-isx + ax)\,dx + \int_{0}^{+\infty} \exp(-isx - ax)\,dx \\
&= \frac{1}{a - is} - \frac{1}{-a - is} \\
&= \frac{2a}{a^2 + s^2}.
\end{aligned}$$

(C.4) $f(x, y) = \exp(-(a^2x^2 + b^2y^2)$.

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(s,t) &= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(- (a^2x^2 + b^2y^2) - i(sx + ty)\Big)\,dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \exp(-a^2x^2 - isx)\,dx \int_{\mathbb{R}} \exp(-b^2y^2 - isy)\,dy \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{|a|}\ \exp(-\frac{s^2}{4a^2})\,\frac{\sqrt{\pi}}{|b|}\ \exp(-\frac{t^2}{4b^2}) \quad \text{(Voir 5.3.)} \\
&= \frac{\pi}{|ab|}\ \exp(-\frac{s^2}{4a^2} - \frac{t^2}{4b^2}).
\end{aligned}$$

(D.1) $T \in \mathcal{S}' \Rightarrow T' \in \mathcal{S}'$?

Par définition, si $\phi \in \mathcal{S}$, $\phi' \in \mathcal{S}$. Comme $< T', \phi > = - < T, \phi' >$, T' est tempérée.

(D.2) Comme $\mathrm{vp}(\frac{1}{X})$ est la dérivée de $\widetilde{\ln^*}$ qui est tempérée (ln est à croissance lente), elle est tempérée (D.1).

(D.3) (a) La distribution associée à $f(x) = \cos(\exp(x))$ est tempérée car $\lim_{x\to\infty} f(x)/x \leq 1$.

(b) La distribution associée à $f(x) = \exp(x)\cos(\exp(x))$ est tempérée, bien que f ne soit pas à croissance lente, car f est la dérivée de $\sin(\exp(x))$:

$$< \exp(x)\cos(\exp(x)), \phi(x) > = - < \sin(\exp(x)), \phi'(x) >$$

et $\phi' \in \mathcal{S}$.

(c) La distribution associée à $f(x) = x^n \exp(x) \cos(\exp(x))$ est tempérée car :

$$< x^n \exp(x) \cos(\exp(x)), \phi(x) > = < \exp(x) \cos(\exp(x)), x^n \phi(x) >$$

et $x^n \phi \in \mathcal{S}$ (voir (b)).

(d) La distribution associée à $f(x) = \mathrm{H}(x) x \exp(x)$ n'est pas tempérée car f est à croissance rapide.

(D.4) $< T, \phi > = \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi(n x_0)$.

Si $x_0 = 0$, la somme est infinie (si $\phi(0) \neq 0$). Si $x_0 \neq 0$ et si $\phi \in \mathcal{S}$, pour n assez grand $|\phi(n x_0)| < |n x_0|^{-p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, la somme converge, et T est tempérée.

(E.1) De :

$$\mathcal{L}(\mathrm{H}) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-pt)\, dt = \frac{1}{p}$$

on déduit : $\mathcal{L}(\delta) = 1$, $\mathcal{L}(\delta') = p$, $\mathcal{L}(\delta^{(n)}) = p^n$ (8.2).

De :

$$\mathcal{L}(\exp(-at) = \int_{\mathbb{R}_+} \exp(-(a+p)t)\, dt = \frac{1}{p+a}$$

on déduit les transformées des fonctions sin, cos, sh et ch.

(E.2) De :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\mathrm{H}(x)\ \exp(x)) & = \dfrac{1}{p-1}, \\ \mathcal{L}(\mathrm{H}(x)\ \exp(ix)) & = \dfrac{1}{p-i}, \\ \mathcal{L}(\mathrm{H}(x)\ \sin(x)) & = \dfrac{1}{p^2+1}, \end{cases}$$

on déduit les inverses de convolution, Θ, de $T(x) = \exp(x)\, \widetilde{\mathrm{H}}(x)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(T \star \Theta) &= \frac{1}{p-1}\, \mathcal{L}(\Theta) \\ \mathcal{L}(\Theta) &= p - 1 \\ \Theta &= \delta' - \delta, \end{aligned}$$

de $\Delta(x) = \exp(ix)\, \widetilde{\mathrm{H}}(x)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Delta \star \Theta) &= \frac{p-i}{p^2+1}\, \mathcal{L}(\Theta) \\ \mathcal{L}(\Theta) &= p - i \\ \Theta &= \delta' - i\delta, \end{aligned}$$

de $T(x) = \sin x\, \widetilde{\mathrm{H}}(x)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(T \star \Theta) &= \frac{1}{p^2+1}\, \mathcal{L}(\Theta) \\
\mathcal{L}(\Theta) &= p^2 + 1 \\
\Theta &= \delta'' + \delta.
\end{aligned}$$

(E.3) Inverse de convolution de $T = \delta'' - 2a\delta' + b\delta$.

Posons $\omega = \sqrt{a^2 - b}$, $\omega \in \mathbb{C}$. De $\mathcal{L}(T) = p^2 - 2ap + b$ on déduit son inverse de convolution Θ :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\Theta) &= \frac{1}{p^2 - 2ap + b}, \\
\Theta &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2 - 2ap + b}\right), \\
&= \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{2\omega}\Big(\frac{1}{p-a-\omega} - \frac{1}{p-a+\omega}\Big)\Big), \\
&= \frac{1}{2\omega}\, \mathrm{H}(t)\, \Big(\exp((a+\omega)t) - \exp((a-\omega)t)\Big).
\end{aligned}$$

(E.4) $T'' - T = 2\delta'$ équivaut à $(\delta'' - \delta) \star T = 2\delta'$, ou encore à :

$$(p^2 - 1)\, \mathcal{L}(T) = 2p,$$

d'où :

$$\mathcal{L}(T) = \frac{2p}{p^2 - 1} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1},$$

et finalement $T = \mathrm{H}(t)\Big(\exp(-t) - \exp(t)\Big)$.

(F.1) Soient P la parabole P d'équation $y = x^2$. Pour tout compact K, soit m la mesure de $K \cap P$. Si $\phi \in \mathcal{E}$, $\mathrm{Supp}(\phi) \in K$, on a :

$$< T, \phi > \leq m\, ||\phi||_\infty$$

et T est d'ordre 0. Son support est P. S'il existait f continue telle que $\widetilde{f} = T$, son support serait P qui est d'intérieur vide, et elle serait nulle sur P par continuité, ce qui est absurde.

(F.2) Si $f(z) = \dfrac{1}{z}$:

$$\begin{aligned}
< \widetilde{f}, \phi > &= \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\phi(x,y)}{z}\, dxdy \\
&= \int_0^{2\pi} \exp(-i\theta) \Big(\int_0^{+\infty} \phi(\rho \sin\theta, \rho\cos\theta)\, \rho d\rho \Big)\, d\theta.
\end{aligned}$$

Si ϕ est à support compact K, $\rho \leq k$, on a $| < \widetilde{f}, \phi > | \leq 2\pi\, k\, ||\phi||_\infty$, et $\widetilde{f}$ est d'ordre 0. Si ϕ est à décroissance rapide, on a pour ρ assez grand

$|\phi(x,y)| \leq \dfrac{1}{1+\rho^4}$, ce qui assure la convergence de l'intégrale.

(F.3) Inverse de convolution de $A = \dfrac{\partial}{\partial x} + i\,\dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$.

Pour $z \neq 0$, on a $Az^{-n} = 0$. Ceci suggère de prendre pour inverse de convolution $\Theta = \lambda z^{-1}$ pour que le support de $A \star \Theta$ soit $\{0\}$, et que le résidu en ce point ne soit pas nul.

On a d'abord :

$$\begin{array}{rcl} < A \star \Theta, \phi > & = & - < \Theta, A\phi > \\ & = & -\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{A\phi(z)}{z}\,dxdy \end{array}$$

puis la formule de Cauchy-Pompeiu :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{A\phi(z)}{z - z_0}\,dxdy = -\pi\phi(z_0)$$

appliquée en $z_0 = 0$ montre que :

$$A \star \Theta = \pi\delta$$

d'où $\Theta = \widetilde{f}$ avec $f(z) = \dfrac{1}{\pi z}$.

(F.4) Montrons d'abord que $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ est localement intégrable. Elle est évidement intégrable sur tout compact ne contenant pas l'origine. Si le compact K contient l'origine, considérons le disque D_r centré à l'origine et de rayon r ; f étant intégrable sur l'adhérence de $K \setminus D$, il reste à voir si elle l'est sur D_r :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{D_r} \ln(x^2+y^2)\,dxdy & = & \displaystyle\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \ln(\rho^2)\,\rho d\rho \\ & = & \pi r^2\,(2\ln r - 1), \end{array}$$

quantité qui tend vers 0 avec r.

La fonction f étant à croissance lente, $\widetilde{f}$ est tempérée.

Le fait que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ (f est harmonique) montre que le support de cette distribution, si elle n'est pas nulle, est $\{(0,0)\}$.

Nous avons montré (9.4) que $4\pi\,\Delta^{*-1} \star \delta(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, $\delta(x,y)$ étant l'élément neutre du produit de convolution. On a donc :

$$\Delta(\ln(x^2+y^2)) = 4\pi\,\delta(x,y).$$

Index